11 ЧИСЛОВІ РЯДИ ТА НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

11.1 Поняття числового ряду

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\}$ і формально із її елементів утворимо суму виду:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Формально створена сума $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається числовим рядом.

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - члени ряду;

a_n - загальний член ряду;

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - часткова сума ряду.

🗁**Означення.** Якщо $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається *збіжним,* а число S- його *сумою*; позначення: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Якщо $\nexists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *розбіжним*.

Приклади. Розглянемо числовий ряд

$$1 + q \ + q^2 + q^3 + ... + q^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ .$$

Знайдемо його часткові суми

$$S_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

Застосуємо той факт, що

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, якщо $|q| < 1$,

$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, якщо $|q| > 1$,

$\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, якщо $q = 1$,

$\nexists \lim_{n\to\infty} q^n$, якщо $q = -1$,

для пошуку границі послідовності часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & |q|>1 \\ \nexists, & |q|=1 \end{cases}.$$

Для останнього випадку, якщо $q=1$, то

$$S_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n \to \infty \text{ - розбігається },$$

якщо $q=-1$, то

$$\{S_n = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}\} = \{1,0,1,0,\ldots\} \text{ - розбігається}$$

Розглянемо розклад наступних функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots+R^*_n(x);$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots+R^{**}_n(x);$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+R^{***}_n(x).$$

Позначимо

$$S_n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Застосуємо зазначений розклад за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа

$$\left|S_n - e^x\right| = \left|R^*_n\right| = \left|\frac{e^{\theta_n}}{n!}\cdot x^n\right|, \quad 0<\theta_n<1.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta_n}}{n!}x^n\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{e^{\theta_n}}_{обм.}\cdot\underbrace{\frac{|x|^n}{n!}}_{н.м.п.} = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_n\left|S_n - e^x\right| = 0 \Rightarrow \lim_n S_n = e^x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Зауваження 1. Поняття ряду і послідовності пов'язані між собою. А саме. Будь-якому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ відповідає послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум. Довільній послідовності $\{x_n\} = \{S_n\}$ можна поставити у відповідність ряд з членами

$a_n = S_n - S_{n-1}, \quad \forall n \geq 2, \quad a_1 = S_1.$

Детальніше:

$S_1 = a_1, \qquad a_1 = S_1,$
$S_2 = a_1 + a_2, \qquad a_2 = S_2 - S_1,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad a_3 = S_3 - S_2 ...$

Зауваження 2. Додавання чи відкидання від ряду скінченої кількості членів не впливає на його збіжність.

Д і й с н о, якщо

$n_0 = \max\{$ номер серед відкинутих членів$\}$,

а вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мав часткові суми S_n, то новий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ має в якості членів $a'_n = a_n \quad \forall n \geq n_0 + 1$, а його часткові суми S'_n відрізняються від S_n таким чином, що

$S_n - S'_n = A \quad \forall n \geq n_0 + 1,$

де A - сума відкинутих членів ряду. Отже

$\lim_n S'_n = \lim_n (S_n - A)$
$\exists \Leftrightarrow \exists$
$\nexists \Leftrightarrow \nexists$ ■

Зауваження 3. Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, де $a'_n = ca_n, c = const \neq 0$. Тоді

$\lim_n S'_n = \lim_n cS_n$
$\exists \Leftrightarrow \exists$
$\nexists \Leftrightarrow \nexists$,

Крім того, у випадку їх збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$.

Висновок: ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ - збігаються або розбігаються одночасно, а їх суми (у випадку збіжності) відрізняються сталою *c:*

$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a'_n.$

Зауваження 4. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ збігається, крім того, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Д і й с н о, оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, то

$$\exists \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k \wedge \exists \lim_n \sum_{k=1}^{n} b_k \ .$$

За властивостями границь послідовностей і за означенням суми ряду маємо

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_n \sum\limits_{n=1}^{n} (a_n \pm b_n) & = & \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k & \pm & \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \\ \exists \| & \Leftarrow & \exists \| & \wedge & \exists \| \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n & \pm & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n . \end{array}$$

Теорема *(критерій Коші збіжності ряду).*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і лише тоді, коли він задовольняє вимозі:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \ .$$

Доведення. Критерій Коші для послідовності: Для послідовності:

$$\{S_n\} - çá³ã \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon \ . \qquad (1)$$

Якщо $\{S_n\}$ - послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то

$$S_{n+p} - S_n = \underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (\underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \ . \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1) отримаємо потрібне. ■

Наслідок 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - збіг \Rightarrow r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ - послідовність залишків ряду є н.м.п.

Доведення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon / 2 \ . \qquad (3)$$

Здійснимо граничний перехід під знаком останньої нерівності в (3). Для цього зауважимо, що $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ є частковою сумою ряду $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$,

який отримано відкиданням скінченної кількості членів від ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Тому ряд $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ є збіжним для кожного фіксованого значення $n \in \mathbb{N}$. Отже, існує границя $\exists \lim_{p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, що ми і зазначимо при граничному переході в (3):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0 \; |r_n| < \varepsilon/2 \Rightarrow \{r_n\} \text{ - н.м.п. } \blacksquare$$

Наслідок 2 *(необхідна умова збіжності ряду).*
Якщо ряд збіг., то загальний член ряду прагне до нуля, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{збіг.} \Rightarrow \lim_{n\leftarrow\infty} a_n = 0 .$$

Це те саме, що $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} a_n$ *– розб.* (н.у. не виконується).

► $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *çá³ã* $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0, p = 1 \underbrace{\left|\sum_{k=n}^{n+1} a_k\right|}_{|a_{n+1}|} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$.◄

Приклад. Розглянемо

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \textbf{ - гармонічний ряд.}$$

Для нього $\lim_{n} a_n = \lim_{n} \frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова виконується. Доведемо за критерієм Коші розбіжність ряду:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ *для* $\varepsilon = \frac{1}{2} \forall n_0 \in \mathbb{N}$ *для* $n = n_0$ *і для* $p = n \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \ge \varepsilon$ $\Rightarrow$ крит. Коші не викон. $\Rightarrow$ ***ряд розбігається.***

11.2 Ряди з невід'ємними членами

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \ge 0$. Тоді

$S_1 = a_1 \le S_2 = a_1 = a_3 \ldots \Rightarrow S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n \le \ldots \Rightarrow \{S_n\}$ - ↗ (нестрого).

Теорема *(критерій збіжності ряду з невід'ємними членами).* Ряд з невід'ємними членами збіг. $\Leftrightarrow$ послідовність його часткових сум є обмеженою.

Доведення. *Необхідність*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - збіг \Leftrightarrow \{S_n\} - зб. \Rightarrow \{S_n\} - обмеж.$$

Достатність. $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n, a_n \geq 0 \Rightarrow \{S_n\} \nearrow$.

$$\left.\begin{matrix} \{S_n\} \nearrow \\ \{S_n\} - обм. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{S_n\} \text{ - зб. } \Rightarrow \text{ ряд збігається. } \blacksquare$$

11.2.1. Ознаки порівняння.

Теорема *(загальна ознака порівняння).* Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що $a_n \geq 0, b_n \geq 0$, тоді

$$I.\left.\begin{matrix} a_n \leq b_n \forall n \geq 1 \\ \sum\limits_{n} b_n - зб. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n} a_n - зб.;$$

$$II.\left.\begin{matrix} a_n \leq b_n \forall n \geq 1 \\ \sum\limits_{n} a_n - розб. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n} b_n - розб.$$

$$\begin{matrix} a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1 \\ зб. \Leftarrow зб. \\ розб. \Rightarrow розб. \end{matrix}$$

Доведення.

$$\left.\begin{matrix} A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n \\ a_n \leq b_n \forall n \geq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_n \leq B_n$$

$$\left.\begin{matrix} \sum\limits_{n} b_n - зб. \\ b_n \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{B_n\} - обм. \Rightarrow \exists M > 0 : B_n \leq M$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_n \leq B_n \leq M \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \{A_n\} - обм. \\ a_n \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - зб.$$

Для отримання другої частини твердження теореми достатньо взяти заперечення першої.■

Теорема *(ознака порівняння в граничній формі).* Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що $a_n \geq 0, b_n \geq 0$, і $\exists \lim\limits_{n} \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty)$, тоді

I) якщо $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - зб. \wedge K \neq +\infty\right) \Rightarrow \sum\limits_{n} a_n - зб.$;

II) якщо $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n - розб. \wedge K \neq 0\right) \Rightarrow \sum_n a_n - розб.$.

Зокрема, якщо $0 < K < +\infty$, то ряди зб. або розб. одночасно.

Доведення.

$I) \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left|\dfrac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \Leftrightarrow K - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n < \underbrace{(K+\varepsilon)}_{const} b_n$

$зб. \Leftarrow зб.$

Насправді доведено збіжність ряду $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$, але його збіжність рівносильна збіжності усього ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ згідно до зауваження 2 попереднього параграфа.

II) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{K} < +\infty$. Тоді за частиною I) якщо би ряд $\sum\limits_n a_n$ збігався, то ряд $\sum\limits_n b_n$ збігався б. Ця імплікація є рівносильною імплікації:

$$\sum_n b_n \text{-розб.} \Rightarrow \sum_n a_n \text{-розб.} \blacksquare$$

Теорема (*3 ознака порівняння*)**.** Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що $a_n > 0, b_n > 0$ і $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - зб.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - зб.},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - розб.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - розб.}$$

Доведення. Без обмеження роздумів доведення можна вважати, що $n_0 = 1$, тоді

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}\\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2}\\ \ldots\\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ /перемножимо/ } \frac{a_{n+1}}{a_1}\le\frac{b_{n+1}}{b_1}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}a_{n+1}\le\underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{const}\cdot b_{n+1}\\ зб.\Leftarrow зб.\end{array}\ \blacksquare$$

11.2.2. Радикальна ознака Коші.

Теорема *(радикальна ознака Коші (загальне формулювання)).*

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n\ge 0$, тоді

I) $\left(\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_1\quad \sqrt[n]{a_n}\le p<1\right)\Rightarrow\sum_n a_n - зб.$;

II) $\left(\exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_2\quad \sqrt[n]{a_n}\ge 1\right)\Rightarrow\sum_n a_n - розб.$

Доведення.

I) $a_n\le p^n$
$зб.\Leftarrow зб.$

II) $a_n\ge 1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0\Rightarrow\sum_n a_n - розб.$ (не виконується н.у.) ■

Теорема *(радикальна ознака Коші (граничне формулювання)).*

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n\ge 0\right)\wedge\exists\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\right)\Rightarrow\begin{cases}1)q<1\Rightarrow\sum a_n - зб.,\\ 2)q>1\Rightarrow\sum a_n - розб.,\\ 3)q=1\Rightarrow ???\,сумнівний\ випадок.\end{cases}.$$

Доведення. 1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1\Rightarrow äëÿ\ \varepsilon=\frac{1-q}{2}\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_0:\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon=\frac{1-q}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ q-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=q+\frac{1-q}{2}=\frac{1+q}{2}=p<1\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \forall n\ge n_0\ \sqrt[n]{a_n}<p<1\Rightarrow\sum_n a_n - зб.$ (рад. ознака Коші в загал. формул.)

2) $q>1\ \Rightarrow\ \begin{cases}2a)\ 1<q<\infty\\ 2b)\ q=\infty\end{cases}$

2a) $1<q<\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q>1\Rightarrow$ *для* $\varepsilon=(q-1)\ \exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_1:\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<q-1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}>q-(q-1)=1\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}>1:\forall n\ge n_1\Rightarrow\sum a_n-$ *розб.*

2b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty=q\Rightarrow$ *для* $\varepsilon=1\ \exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_2\ \sqrt[n]{a_n}>\varepsilon=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}>1:\forall n\ge n_2\Rightarrow\sum\limits_n a_n-$ *розб.*

3) Розглянемо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\ \sum\limits_n\frac{1}{n^2}$. Для них $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1=q$ і $\lim\limits_n\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1=q$. Перший із цих рядів є гармонічним розбіжним, а другий є збіжним (це ми доведемо трохи пізніше!).■

11.2.3. Ознака Кумера і наслідк и знеї (ознаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гауса).

Теорема (*ознака Кумера*). Нехай $C_1,C_2,...,C_n,...$ – довільна послідовність, що задовольняє вимогам

$1)C_n>0,$

$2)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n}-$ *розб.*

Розглянемо послідовність $x_n=C_n\cdot\ \frac{a_n}{a_{n+1}}-C_{n+1},\ a_n>0$ Тоді

1.$\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_1:x_n\ge\sigma>0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-$ *зб.*

2.$\exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_2:x_n\le 0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-$ *розб.*

Доведення. 1. Оскільки $x_n=C_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-C_{n+1}\ge\sigma$, то

$$C_na_n-C_{n+1}a_{n+1}\ge\sigma\cdot a_{n+1}. \qquad (*)$$

Щоб застосувати до цієї нерівності ознаку порівняння, дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_na_n-C_{n+1}a_{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Маємо:

$\forall n\ge n_1\quad x_n=C_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-C_{n+1}\ge\sigma>0\Rightarrow b_n=C_na_n-C_{n+1}a_{n+1}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow C_na_n>C_{n+1}a_{n+1}\quad\forall n\ge n_1\Rightarrow\left.\begin{matrix}\{\tilde{N}_{\partial}\ a_{\partial}\}-\searrow(n\ge n_1)\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad C_na_n>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\leftarrow\infty}C_na_n=S.$

Розглянемо часткові суми ряду, що досліджується

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(C_k a_k - C_{k+1}a_{k+1}\right) = C_1a_1 - C_2a_2 + C_2a_2 - C_3a_3 + C_3a_3 - C_4a_4 + \ldots +$$

$$+C_n a_n - C_{n+1}a_{n+1} = C_1a_1 - C_{n+1}a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = C_1a_1 - S = const \Rightarrow \sum_n b_n - çá.$$

Тому, із (*) і ознаки порівняння отримаємо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Оскільки $C_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} \le 0$, то $C_n a_n \le C_{n+1}a_{n+1}$, а так як $a_n > 0$ і $C_n > 0$, то $\dfrac{C_n}{C_{n+1}} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1/C_{n+1}}{1/C_n} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{C_n} - розб. \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n a_n - розб. \text{ (3 озн. порівняння). } \blacksquare$$

Теорема (*ознака Кумера* (гранична форма)). Нехай $a_n > 0$, а $\{C_n\} - довільна$, така, що $\begin{cases} 1) C_n > 0, \\ 2) \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{C_n} - розб. \end{cases}$ і

$\exists \lim\limits_n x_n = \lim\left(C_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1}\right) = x$. Тоді $\begin{cases} 1) x > 0 \Rightarrow \sum\limits_n a_n - зб., \\ 2) x < 0 \Rightarrow \sum\limits_n a_n - розб., \\ 3) x = 0 \Rightarrow ??? \end{cases}$

Доведення здійснюється аналогічно граничній формі радикальної ознаки Коші, але (зрозуміло, що) на основі ознаки Кумера в загальному формулюванні.

Наступні ознаки є наслідками ознаки Кумера.

Теорема *(ознака Даламбера).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_n a_n, \quad a_n > 0 \\ \exists \lim\limits_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{cases} 1) q < 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n \ зб., \\ 2) q > 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n \ розб., \\ 3) q = 1 \Rightarrow ???. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $C_n = 1 \Rightarrow \left(C_n > 0 \wedge \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{C_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1} - розб.\right)$. Тоді

$$x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} = 1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x_n + 1}.$$

Оскільки за умовою $\exists \lim\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тому $\exists \lim\limits_n x_n = x$ і $q = \frac{1}{x+1}$. Отже,

застосовуючи ознаку Кумера, отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ q < 1 \Rightarrow x + 1 > 1 \Rightarrow x > 0; \\ \quad q = 0 \Rightarrow x = +\infty > 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n a_n - зб.,$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ q > 1 \Rightarrow x + 1 < 1 \Rightarrow x < 0; \\ \quad q = \infty \Rightarrow x = -1 < 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n a_n - розб.,$$

3) $q = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$??? ■

Теорема (*ознака Раабе).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_n a_n,\ a_n > 0 \\ \exists \lim\limits_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) r < 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n - розб., \\ 2) r > 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n - зб., \\ 3) r = 1 \Rightarrow ??? \end{cases}$$

Доведення. Нехай $C_n = n \Rightarrow \left(C_n > 0 \wedge \sum\limits_n \frac{1}{C_n} = \sum\limits_n \frac{1}{n} - розб. \right)$. Тоді

$$x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1).$$

Покладемо $r_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$, тоді

$$x_n = r_n - 1, \quad r_n = x_n + 1,$$

$$r = \lim_{\exists}\limits_n r_n = \lim_{\exists}\limits_n (x_n + 1) = \left\| \lim_n x_n = x \right\| = x + 1 \quad \Rightarrow \quad r = x + 1.$$

Отже, за ознакою Кумера

$$1) r < 1 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sum_n a_n - розб.,$$

$$2) r > 1 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sum_n a_n - зб.,$$

$$3) r = 0 \Rightarrow x = -1 < 0 \Rightarrow \sum_n a_n розб.,$$

$$4) r = -\infty \Rightarrow x = -\infty < 0 \Rightarrow \sum_n a_n розб.,$$

$$5) r = +\infty \Rightarrow x = +\infty > 0 \Rightarrow \sum_n a_n зб.,$$

$$6) r = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow ??? \blacksquare$$

Теорема *(ознака Бертрана).*

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n,\quad a_n>0\\ \exists\lim\limits_n \ln n\cdot\left(n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)=b\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1)b>1\Rightarrow\sum\limits_n a_n-зб.,\\ 2)b<1\Rightarrow\sum\limits_n a_n-розб.,\\ 3)b=1\Rightarrow ???\end{cases}$$

Доведення. Нехай $C_n=n\ln n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{C_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ - розбігається (буде доведено пізніше!). Тоді

$$x_n=C_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-C_{n+1}=n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)=n\ln n\underline{\frac{a_n}{a_{n+1}}}-\underline{\underline{n\ln(n+1)}}-\underline{\underline{\ln(n+1)}}+$$

$$+\underline{\underline{n\ln n}}-\underline{n\ln n}+\underline{\underline{\ln n}}-\underline{\ln n}=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-n[\ln(n+1)-\ln n]-[\ln(n+1)-\ln n]=$$

$$=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-\ln\frac{n+1}{n}\cdot(n+1)=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Rightarrow$$

$$b=\lim_n\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)=\lim_n\left(x_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)=\lim_n x_n+\ln e=$$

$$=\left\|\exists\lim_n x_n=x\right\|=x+1\Rightarrow$$ за ознакою Кумера

$1)b>1\Rightarrow x>0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-зб.,\qquad b=\infty\Rightarrow x=\infty>0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-зб.;$

$2)b<1\Rightarrow x<0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-розб.,\quad b=0\Rightarrow x=-1<0\Rightarrow\sum\limits_n a_n-розб.;$

$3)b=1\Rightarrow x>0$??? . ■

Теорема *(ознака Гауса).*

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n,\quad a_n>0\\ q_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^2},\quad 0<\theta_n<1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1)\lambda>1\ \wedge\ (\lambda=1\wedge\mu>1)\Rightarrow\sum\limits_n a_n-зб.;\\ 2)\lambda<1\ \wedge\ (\lambda=1\wedge\mu\le 1)\Rightarrow\sum\limits_n a_n-розб.\end{cases}$$

Доведення. Спочатку до ряду $\sum\limits_n a_n$ застосуємо ознаку Даламбера при $\underline{\lambda\neq 1}$, тоді

$$\lim_n q_n=\lim_n\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_n\left(\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\right)=\lambda$$

$$q=\lim_n\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda>1(\lambda=\infty)\Leftrightarrow 0\le q<1\Rightarrow зб.\\ \lambda<1\Leftrightarrow q>1\Rightarrow розб.\\ \lambda=0\Leftrightarrow q=\infty\Rightarrow розб.\end{cases}$$

До ряду $\sum_n a_n$ застосуємо ознаку Раабе при $\lambda = 1$, тоді

$$\lim_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_n n\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}\right) = \lim_n\left(\mu + \frac{\theta_n}{n}\right) = \mu = r \Rightarrow \begin{cases} \mu = r < 1 \Rightarrow \textit{розб.}, \\ \mu = r > 1 \Rightarrow \textit{зб.} \end{cases}$$

Застосуємо ознаку Бертрана при $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$, тоді

$$\lim_n \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = \lim_n \ln n \cdot \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}\right) - 1\right) = \lim_n \theta_n \cdot \frac{\ln n}{n} = 0 = b < 1 \Rightarrow \textit{розб.} \blacksquare$$

11.2.4. Інтегральна ознака Маклорена-Коші.

Теорема *(інтегральна ознака Маклорена-Коші).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \\ 1) f(n) = a_n \\ 2) f(x) \searrow (\textit{нестрого}) \\ \quad \textit{на}\,[n_0, \infty] \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx - \textit{зб.}(\textit{розб}). \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{зб.}(\textit{розб})\right)$$

Доведення. Розглянемо числовий ряд і функцію $\sum_n a_n, a_n > 0, f(x)$ такі, що

$1) a_n = f(n)\ (f(x) > 0);$
$2) f(x) \searrow (\textit{нестрого})\ \textit{на}\,[n_0, \infty].$

Уведемо до розгляду також функцію $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ - це інтеграл із змінною верхньою межею. Він задовольняє властивостям:

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F(x) \nearrow; \\ F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt > 0, \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3) \lim_{x\to\infty} F(x) - \textit{скін.}\ \ \textit{або}\ \ +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{n_0}^{\infty} f(t)de < \infty \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(t)dt - \textit{зб.} \\ \lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(t)dt - \textit{розб.} \end{cases}$$

Розглянемо різницю

$$F(n+1) - F(n) = \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt - \int_{n_0}^{n} f(t)dt = \int_{n}^{n+1} f(t)dt,$$

Застосуємо до неї формулу Лагранжа:

$F(n+1)-F(n)=F'(n+\theta_n(n+1-n))\big(n+1-n\big);$
$F\big(n+1\big)-F(n)=f(n+\theta_n).$

Тоді, застосувавши не зростання функції $f(x)$, отримаємо

$$n\le n+\theta_n\le n+1 \quad\Rightarrow\quad f(n)\ge f(n+\theta_n)\ge f(n+1);$$
$$f\big(n+1\big)\le F\big(n+1\big)-F(n)\le f(n);$$
$$a_{n+1}\le F\big(n+1\big)-F(n)\le a_n. \qquad (\☺)$$

Розглянемо суму

$$\sum_{n=n_0}^{N}\big(F\big(n+1\big)-F(n)\big)=F\big(n_0+1\big)-F(n_0)+F\big(n_0+2\big)-F\big(n_0+1\big)+\ldots+$$
$$+F\big(N+1\big)-F(N)=-F(n_0)+F(N+1)=\int_{n_0}^{N}f(t)dt.$$

Якщо інтеграл $\int_{n_0}^{\infty}f(t)dt$ збіг. (розбіг.), то збіг. (розбіг.) ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty}\big(F\big(n+1\big)-F(n)\big)$, а разом з ним, в силу ознаки порівняння, нерівності ($\☺$) і зауваження 2, збіг. (розбіг.) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ■

Геометрична інтерпретація інтегральної ознаки Маклорена-Коші. Просумуємо ($\☺$):

$$\sum_{n=n_0+1}^{N}a_n\le\int_{n_0}^{N}f(x)dx\le\sum_{n=n_0}^{N}a_n \quad\Rightarrow$$
$$\downarrow N\to\infty$$
$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}a_n\le\int_{n_0}^{\infty}f(x)dx\le\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n \quad\Rightarrow$$
$$\int_{n_0}^{\infty}f(x)dx-зб.(розб.)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n-зб.(розб.)$$

Невласному інтегралові $\int_{n_0}^{\infty}f(x)dx$ геометрично відповідає нескінченний криволінійний трикутник, обмежений графіками ліній $y=0, y=f(x), x=n_0$ а ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ - площа сходинкової фігури. На рис. 11.1 зображено випадок $n_0=1$.

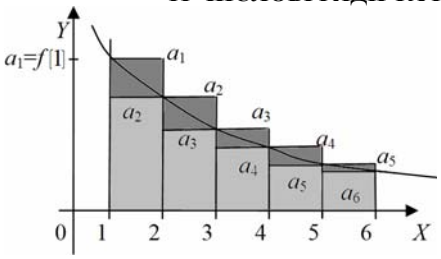

Рис. 11.1.

Висновок. Якщо площа нескінченного криволінійного трикутника під графіком функції $f(x)$ на проміні $[n_0;+\infty)$ скінчена, то скінчена і площа сходинкової фігури, що лежить в середині цього трикутника, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Якщо площа фігури під графіком функції $f(x)$ нескінченна, то нескінчена площа сходинкової фігури, розташованої зовні трикутника, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається

Оцінка залишку збіжного ряду. Просумуємо (☺) $a_k \le F(k)-F(k-1) \le a_{k-1}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \le F(n+m)-F(n) \le \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \le \lim_{m\to\infty} \int_n^{n+m} f(x)dx \le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{n+m} a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=n}^{\infty} a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx\,.}$$

Приклад 1. Ряд $\sum_n \frac{1}{n^p}$ є *узагальненим гармонічним*. Він збігається, якщо показник степеня знаменника $p>1$, розбігається, якщо $p\le 1$.

Це є наслідком інтегральної ознаки Маклорена-Коші і того факту, що $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$, $a>0$

зб. $\lambda>1$ розб. $\lambda\le 1$.

Детальне доведення провести самостійно!

Задача. Довести, що ряд $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$ розбігається за допомогою інтегральної ознаки маклорена-Коші.

11.2.5. Відсутність універсального ряду порівняння.

При доведенні радикальної ознаки Коші збіжності знакододатного ряду ми оцінювали його члени геометричною прогресією, а при доведенні розбіжності – членами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. При доведенні ознаки Даламбера в якості ряду порівняння (при дослідженні на розбіжність) застосовували ряд $\sum_n 1$, в ознаці Бертрана - ряд $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$, в ознаці Раабе – ряд $\sum_n \frac{1}{n}$.

Якщо доводити останні три ознаки не як наслідки ознаки Кумера, то в загальному випадку з використанням ознаки порівняння застосовуються для дослідження на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}, \quad \sigma > 0$.

Поставимо питання: чи існує універсальний, найповільніше збіжний (розбіжний) ряд, порівняно з яким можна зробити висновок про збіжність (розбіжність) ряду з невід'ємними членами.

🗁**Означення.** Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n - зб.;\ C_n \geq 0;\ C'_n \geq 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n - зб.$ *повільніше за ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \overset{def}{\Leftrightarrow}$ залишок $\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ є н.м.п. більш високого порядку мализни за залишок $\gamma'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C'_k$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n$, тобто $\lim_n \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0$.

🗁**Означення.** Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n - розб.: d_n \geq 0 \wedge d'_n \geq 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ *-розб. повільніше за* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \overset{def}{\Leftrightarrow}$ часткова сума $D'_n = \sum_{k=1}^{n} d'_k$ ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ є н.в.п. нижчого порядку за часткову суму $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, тобто $\lim_n \frac{D_n}{D'_n} = \infty \left(або \lim_n \frac{D'_n}{D_n} = 0 \right)$.

Твердження 1.

$\forall \sum_n C_n \ (C_n \geq 0) - зб. \ \exists \sum_n C'_n \ (C'_n \geq 0) - зб. повільн. за \sum_n C_n$.

Доведення. В якості шуканого ряду візьмемо ряд з членами $C'_n = \sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}$. Оскільки $C_n \geq 0$, то $\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k \leq \gamma_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k$, тому $C'_n \geq 0$. Знайдемо залишок побудованого ряду:

$$\gamma'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C'_k = \sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\gamma_{n+1}} + \sqrt{\gamma_{n+1}} + \sqrt{\gamma_{n+2}} - \sqrt{\gamma_{n+3}} + ... = \sqrt{\gamma_n}.$$

$$\sum_n C_n - зб. \Rightarrow \gamma_n \to 0 \Rightarrow \gamma'_n = \sqrt{\gamma_n} \to 0 \Rightarrow \{\gamma'_n\} i \{\gamma_n\} - н.м.п. \wedge \sum_n C'_n - зб.$$

Порівняємо нескінченно малі:

$$\lim_n \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = \lim_n \frac{\gamma_n}{\sqrt{\gamma_n}} = \lim_n \sqrt{\gamma_n} = 0.$$

Це і доводить потрібне. ■

Твердження 2. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} d_n - розб., d_n \geq 0 \ \exists \sum_{n=1}^{\infty} d'_m - розб. повіл. за \ \sum_{n=1}^{\infty} d_n$

Доведення. В якості шуканого ряду візьмемо ряд з членами $d'_1 = \sqrt{D_1}$, $d'_n = \sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}$ $(n \geq 2)$. Оскільки $d_n \geq 0$, то $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_n \geq D_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_n$, тому $d'_n \geq 0$ і $\{D_n\} \nearrow$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n = \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}} \right);$$

$$\left. \begin{array}{l} D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \nearrow \\ \sum_n d_n - розб. \end{array} \right\} \Rightarrow D_n \to +\infty \Rightarrow D'_n = \sum_{k=1}^{n} d'_k = \sqrt{D_n} \to +\infty \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} d'_n \text{ - розб.}$$

Порівняємо нескінченно великі:

$$\lim_n \frac{D_n}{D'_n} = \lim_n \frac{D_n}{\sqrt{D_n}} = \lim_n \sqrt{D_n} = \infty .$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ -розб. повільніше за $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$. ■

Теорема. Ніякий зб. (розб.) ряд не може бути універсальним засобом для встановлення – шляхом порівняння з ним – збіжності (розбіжності) інших рядів.

Доведення. Пп.. Існує збіжний ряд $\sum_n C_n$ з невід'ємними членами, що є універсальним для перевірки на збіжність. Тоді розглянемо ряд із твердження 1 з членами $C'_n = \sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}$. Виразимо члени ряду $\sum_n C_n$ через γ_n :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k, \\ \gamma_{n-1} &= \sum_{k=n}^{\infty} C_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_n = \gamma_{n-1} - \gamma_n .$$

Порівняємо члени цих рядів:

$$\lim_n \frac{C_n}{C'_n} = \lim_n \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} \cdot \lim_n \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \; C_n \leq C'_n.$$

Отже, ряд $\sum_n C'_n$ дослідити на збіжність, порівнюючи його з $\sum_n C_n$ не можливо. Таким чином, ряд $\sum_n C_n$ не є універсальним рядом порівняння для дослідження на збіжність. $\nrightarrow$

Припустимо тепер, що розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ з невід'ємними членами є універсальним для перевірки на розбіжність. Тоді розглянемо ряд із твердження 2 з членами $d'_1 = \sqrt{D_1}$, $d'_n = \sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}$ $(n \geq 2)$. Оскільки $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, $D_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k$, то $d_1 = D_1, d_n = D_n - D_{n-1}$. Порівняємо члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$:

$$\lim_n \frac{d_n}{d'_n} = \lim_n \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \lim_n \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} = +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \; d_n \geq d'_n.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n'$ дослідити на розбіжність, порівнюючи його з $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ не можливо. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ не є універсальним рядом порівняння для дослідження на розбіжність. $\nrightarrow$ ■

11.3 Збіжність довільних рядів

До довільних рядів відносять ряди, які містять як додатні так і від'ємні члени. Якщо ряд містить скінчену кількість від'ємних елементів, то на них можна не звертати увагу і досліджувати цей ряд на збіжність, як знакододатний. Якщо додатних скінченна кількість, то досліджувати ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ на збіжність, як знаковід'ємний, роблячи висновок про його збіжність, досліджуючи ряд із його модулів $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Такі ряди не відносять до довільних, а без обмеження роздумів вважають знакопостійними. За цієї причини, до довільних рядів відносять ряди, що містять нескінчену кількість як додатних так і від'ємних членів.

🗁**Означення.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - абсолютно\ зб. \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum |a_n| - зб.$

🗁**Означення.** $\sum_{n} a_n - умовно\ зб. \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \sum_n a_n - зб.; \\ 2) \sum_n a_n - абс.\ розб. \end{cases}$

Теорема. $\sum_n a_n - абс.зб. \Rightarrow \sum_n a_n - зб.$

Доведення. *І спосіб.* Застосовуємо критерій Коші збіжності ряду

$$\sum_n a_n - абс.зб. \Leftrightarrow \sum_n |a_n| - зб. \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon .$$

За нерівністю трикутника $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$ Тому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

Це означає, що за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

І спосіб. Позначимо

$$a^+ = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a \le 0 \end{cases}, \quad a^- = a - a^+ .$$

Для даного ряду маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_n \left(a_n^+ + a_n^- \right)$. Дослідимо ряди $\sum_n a_n^+$ і $\sum_n a_n^-$ на збіжність. Для ряду $\sum_n a_n^+$

$$\sum_n a_n \text{ –абс.зб.} \Rightarrow \sum_n |a_n| - \text{зб.};$$

$$\left.\begin{array}{l} a^+{}_n \le |a_n| \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \sum_n a_n^+ = A^+ .$$

Аналогічно ряд $\sum_n a_n^-$ збігається, а його суму позначимо A^-. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_n \left(a_n^+ + a_n^- \right) = \sum_n a_n^+ + \sum_n a_n^- = A^+ + A^- .$$

Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а його сума дорівнює $A^+ + A^-$. ■

Під довільним рядом розуміємо ряд, що містить нескінченну кількість додатних і від'ємних членів. Довільні ряді називають *знакозмінними*. Частковим випадком знакозмінних рядів є ряди *знакопочережні:*

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{n+1} C_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n, \quad C_n \ge 0 .$$

Для дослідження на абсолютну збіжність довільних рядів до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ застосовуються ознаки порівняння, радикальний Коші, інтегральний Маклорена-Коші, Даламбера, Раабе, Гауса, Бертрана.

Знакопочережні ряди досліджуються на збіжність за допомогою ознаки Лейбніца.

Знакозмінні ряди загального вигляду (ті, що не є знакопочережними) досліджуються на збіжність за допомогою ознак Абеля і Дірихле.

11.3.1.Перетворення Абеля. Нехай $B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$, тоді

$$\beta_1 = B_1;\ \beta_2 = B_2 - B_1;\ \beta_3 = B_3 - B_2; \ldots \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Розглянемо $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \beta_i$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \beta_i = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \ldots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}) =$$
$$= B_1 (\alpha_1 - \alpha_2) + B_2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + B_m (\alpha_m - \alpha_{m+1}) = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} B_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Отже, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} B_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ - перетворення Абеля.

Лема. Якщо

1) $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ - монотонна скінченна множина,

2) $\{\beta_i\}_{i=1}^{m}$ скінченна множина, для якої $\left\{B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right\}_{k=1}^{m}$ обм. за модулем L, тобто $|B_k| \le L\ \forall k = \overline{1, m}$,

тоді

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le L|\alpha_1| + 2L|\alpha_m| .$$

Зокрема, якщо $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ - не зростає і $\alpha_i \ge 0\ \forall i$, то $\left|\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \beta_i\right| \le L\alpha_1$.

Доведення. Оскільки множина $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ - монотонна, то

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \pm \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \pm(\alpha_1 - \alpha_m) = |\alpha_1 - \alpha_m| ,$$

де «+» обирається, якщо $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ - зростає, а «-» у випадку її спадання.

Маємо

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \beta_i\right| \le |\alpha_m||B_m| + \sum_{i=1}^{m-1} |B_i||\alpha_{i+1} - \alpha_i| \le L|\alpha_m| + L\sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = L|\alpha_m| + L|\alpha_1 - \alpha_m| \le$$
$$\le L|\alpha_m| + L|\alpha_1| + L|\alpha_m| = 2L|\alpha_m| + L|\alpha_1|.$$

Зокрема, коли $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ - не зростає і $\alpha_i \ge 0\ \forall i$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \beta_i\right| \le L|\alpha_m| + L|\alpha_1 - \alpha_m| = L\alpha_m + L\alpha_1 - L\alpha_m = L\alpha_1. \ \blacksquare$$

11.3.2. Ознаки Абеля, Діріхле і Лейбніца.

Теорема *(ознака Абеля).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\sum_{n=1}^{\infty} b_n - зб. \\ 2)\{a_n\} - монот. \\ 3)\{a_n\} - обм.\ за\ мод.\ числом\ K : |a_n| = K \forall n \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - зб.$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right|$. Застосуємо умову 1):

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n - зб. \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} b_{n+i}\right| < \varepsilon .$$

Щоб застосувати лему, уведемо позначення $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+1}$. Всі вимоги леми виконуються, $L = \varepsilon$, $m = p$, тому

$$\left|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i\right| \leq \varepsilon |\alpha_1| + 2\varepsilon |\alpha_p| .$$

Застосуємо умову 3) і зробимо зворотні позначення:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 3\varepsilon K \quad \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} .$$

Тому за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається. ■

Теорема *(ознака Діріхле).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\{a_n\} \searrow \ i\ \lim_n a_n = 0 \\ 2)B_n = \sum b_i,\ \{B_i\} - обм.за\ \ мод.M \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_b - зб.$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right|$.

Покладемо $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+1}$. Тоді за лемою (частковий випадок) в силу умови 2) потрібно обрати $L = M$, отримаємо

$$\left|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i\right| \leq M \alpha_1 .$$

Застосуємо другу частину умови 1):

$$\lim_n a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \ |a_n| < \varepsilon ,$$

зробимо зворотні позначення, отримаємо

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le Ma_{n+1} < \varepsilon M \quad \forall n \ge n_0 \forall p \in \mathbb{N}.$$

Тому за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається. ■

Теорема *(ознака Лейбніца).* $\left.\begin{array}{l} 1)\{C_n\}\searrow \\ 2)\lim\limits_n C_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ - зб.

Доведення. В ознаці Діріхле покладемо $a_n = C_n$, $b_n = (-1)^{n+1}$. Тоді $\{a_n\}\searrow$ *і* $\lim\limits_n a_n = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = b_1 = 1 \\ B_2 = b_1 + b_2 = 1-1 = 0 \\ B_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1-1+1 = 1 \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \{B_n\} = \{1,0,1,0,1,0,\ldots\}$$ обм. за модулем числом 1. Вимоги ознаки Діріхле виконуються, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ зб. ■

Оцінка залишку ряду лейбніцевого типу. Розглянемо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$, у якого $1)\{C_n\}\searrow$; $2)\lim\limits_n C_n = 0$. Оцінимо його відрізок $r_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k$ за частковим випадком леми в тих же позначеннях, що і в доведенні ознаки Лейбніца:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \le Ma_{n+1} = \|M=1\| = a_{n+1} = C_{n+1} \Rightarrow |r_{n,p}| \le C_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_n| = \left|\lim_{p\to\infty} r_{n,p}\right| \le C_{n+1}.$$

Висновок: модуль залишку ряду лейбніцевого типа не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. За ознакою Лейбніца $C_n = \frac{1}{n}\searrow, \to 0$, тому ряд зб.

11.4 Асоціативна властивість рядів

Теорема. Якщо ряд $\sum_n a_n$ збігається, тоді ряд утворюється із даного групування його членів

$$(a_1+\ldots+a_{n1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+(a_{n_2+1}+\ldots.+a_{n_3})+\ldots+(a_{n_{p+1}}+\ldots+a_{n_p})+\ldots \quad (*)$$

(тут $\{n_p\}$ зростаюча послідовність номерів) збігається завжди і має таку саму силу, що і даний ряд.

Доведення. Позначимо $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$; A_p^* - часткова сума ряду (*). Очевидно, що $A_p^*=A_{n_p}$. Оскільки $\sum_n a_n$ - зб., то $\{A_n\}$ – збігається, тому $\{A_{n_p}\}$ - збігається, як підпослідовність збіжної послідовність. Отже, $\{A_p^*\}$ – послідовність часткових сум перегрупованого ряду (*) – збігається до $\lim_n A_n$, тобто до суми вихідного ряду. ■

Запитання: чи правда, що із збіжності ряду (*) випливає збіжність ряду $\sum_n a_n$?

Відповідь на це запитання не завжди є позитивною. Наприклад, ряд

$$(1-1)+1-1)+(1-1)+\ldots$$

збігається до 0. Його отримано із розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ шляхом групування членів.

Розглянемо випадок, коли відповідь на задане запитання є позитивною.

Твердження. Якщо всі доданки в кожній із дужок ряду (*) мають один і той самий знак і ряд (*) зб., тоді ряд $\sum_n a_n$ збігається.

Доведення. Якщо $A_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$, тоді $\exists p\in\mathbb{N}: n_{p-1}+1\le m\le n_p$. Позначимо через A_p^* часткову суму ряду (*). Очевидно, що $A_p^*=A_{n_p}$. Тоді у випадку, коли кожен доданок в p-ій дужці

додатний, то	а коли від'ємний, то
$\underbrace{A_{n_{p-1}}}_{A_{p-1}^*}\le A_m\le\underbrace{A_{n_p}}_{A_p^*}$ $\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ $\quad A$	$\underbrace{A_{n_{p-1}}}_{A_{p-1}^*}\ge A_m\ge\underbrace{A_{n_p}}_{A_p^*}$ $\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ $\quad A$

Об'єднавши випадки, приходимо до висновку, що ряд (*) збігається до A. ■

Приклад № Д 2672. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ на абсолютну і умовну збіжність.

Абсолютна розбіжність очевидна. Дослідимо ряд на збіжність за допомогою останньої теореми.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\ldots-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{24}\right)-\ldots=$$

$$=\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{C_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{C_2}-\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{15}\right)}_{C_3}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{24}\right)}_{C_4}-\ldots+$$

$$+(-1)^k\underbrace{\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)}_{C_k}+\ldots=c_1-c_2+c_3-c_4+\ldots+(-1)^{k+1}c_k+\ldots$$

Довести збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}c_k$ за допомогою ознаки Лейбніца.

Розглянемо члени цього ряду

$$c_k=\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{k^2+k-1}}_{\substack{k\ доданків\\ a_k}}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\ldots+\frac{1}{k^2+2k}}_{\substack{k+1\ доданків\\ b_k}},$$

$$c_k=a_k+b_k,$$

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k^2+k}\cdot k\le a_k\le\frac{1}{k^2}\cdot k=\frac{1}{k},$$

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k^2+2k+1}\cdot(k+1)\le b_k\le\frac{1}{k^2+k}\cdot(k+1)=\frac{1}{k}.$$

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{k+1}\le a_k\le\frac{1}{k}\\ \frac{1}{k+1}\le a_k\le\frac{1}{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\frac{2}{k+1}\le c_k\le\frac{2}{k};$$

$c_1>c_2>c_3>c_4>c_5>\ldots>c_n>c_{n+1}>$.

Тому

$$\left.\begin{array}{l}1)\{C_n\}\searrow\\ 2)\lim\limits_n C_n=0\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$$ - зб. за ознакою Лейбніца.

Всі доданки в дужках мають однакові знаки. Отже, за останнім твердженням наданий ряд збігається.

Висновок: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ збігається умовно.

11.5 Комутативна властивість числових рядів

Переставленням множини A називається взаємнооднозначне відображення множини A на себе.

Теорема 1.1. Знакопостійний збіжний ряд при переставленні своїх членів не змінює суму.

*Доведення***.** Без обмеження загальності роздумів можна вважати, що $x_k \geq 0$. Позначимо часткові суми вихідного ряду через $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, його сумму – s, а часткові суми переставленого ряду – $S'_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}$.

Так як $x_k \geq 0$, то $S'_1 \leq S'_2 \leq \ldots \leq S'_n \leq s$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя s' зростаючої обмеженої послідовності $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$, причому $s' \leq s$. З іншого боку, $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi^{-1}(\pi(k))}$, тому $s \leq s'$. З'єднуючи отримані нерівності, отримаємо потрібне. ■

Теорема 1.2. Абсолютно збіжний ряд при переставленні своїх членів не змінює суму.

Доведення. Введемо позначення для будь-якого числа a:

$$a^+ = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0 \\ 0, \text{ якщо } a \leq 0 \end{cases}, \qquad a^- = a^+ - a .$$

Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$: із оцінок $x_n^+ \leq |x_n|$ і $x_n^- \leq |x_n|$, ознаки порівняння випливає їх збіжність, а також можливість представлення

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- . \qquad (1.1)$$

Із (1.1) випливає збіжність вихідного ряду. Позначимо суму рядів в записі (1.1) відповідно s, s^+, s^-, тоді $s = s^+ - s^-$. За теоремою 1.1 при

будь-якому переставленні $\pi : N \to N$ виконується $s^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x^+_{\pi(n)}$ і $s^- = \sum_{n=1}^{\infty} x^-_{\pi(n)}$, звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^+_{\pi(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} x^-_{\pi(n)} = s^+ + s^- = s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,. \blacksquare$$

Теорема 1.3 *(Рімана).* Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається умовно, тоді

1) для будь-якого дійсного числа $s \in R$ знайдеться переставлення $\pi : N \to N$, для якого $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$;

2) можна побудувати таке переставлення $\sigma : N \to N$, що $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \infty$.

*Доведення***.** Розглянемо множини

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ... : x_{a_n} \ge 0\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ... : x_{b_n} < 0\}$

та частини вихідного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_{a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{b_n}$, що їм відповідають. Якщо обидва ці ряда збігається, то вихідний ряд збігається абсолютно. Якщо один із цих рядів збігається, а інший розбігається, то вихідний ряд розбігається. Отже, умовна збіжність вимагає одночасної розбіжності цих рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{b_n} = +\infty \,. \tag{1.2}$$

1) Нехай $s \ge 0$. тоді переставлення π будуємо наступним чином:

$\pi(1) = a_1$,
$\pi(2) = a_2$,…,
$\pi(j_1) = a_{j_1}$, причому $S_{j_1} = \sum_{k=1}^{j_1} x_{\pi(k)} > s$, а $S_{j_1 - 1} \le s$;
$\pi(j_1 + 1) = b_1$,
$\pi(j_1 + 2) = b_2$,…,
$\pi(j_1 + j_2) = b_{j_2}$, де $S_{j_1 + j_2} < s$, а $S_{j_1 + j_2 - 1} \ge s$;
$\pi(j_1 + j_2 + 1) = a_{j_1 + 1}$,…

$\pi(j_1 + j_2 + j_3) = a_{j_1+j_2}$, де $S_{j_1+j_2+j_3} > s$, а $S_{j_1+j_2+j_3-1} \le s$;

……...

$\pi(j_1 + \ldots + j_{2k} + 1) = a_{j_1+\ldots+j_k+1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + \ldots + j_{2k+1}) = a_{j_1+\ldots+j_k+j_{k+1}}$, $S_{j_1+\ldots+j_{2k+1}} > s$, $S_{j_1+\ldots+j_{2k+1}-1} \le s$;

а

$\pi(j_1 + \ldots + j_{2k+1} + 1) = b_{j_1+\ldots+j_k+1}$,

……

$\pi(j_1 + \ldots + j_{2k+2}) = b_{j_1+\ldots+j_{k+1}}$, де $S_{j_1+\ldots+j_{2k+2}} < s$, $S_{j_1+\ldots+j_{2k+2}-1} \ge s$;

……

Така побудова є можливою завдяки (1.2). Переставлений таким чином ряд буде збігатися до s. Дійсно, нехай номер m задовольняє нерівності $j_1 + j_2 + \ldots + j_k < m \le j_1 + j_2 + \ldots + j_{k+1}$, тоді

$$|S_m - s| \le \left| x_{\pi(j_1+\ldots+j_{k+1})} \right|.$$

В наслідок збіжності ряду його загальний член прагне до нуля, тому із останнього співвідношення отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$.

2) Шукане переставлення σ, при якому ряд розбігається, будуємо таким чином:

$\pi(1) = a_1$,

$\pi(2) = a_2, \ldots, \pi(j_1) = a_{j_1}$, причому $S_{j_1} = \sum\limits_{k=1}^{j_1} x_{\pi(k)} > 1 - x_{b_1}$;

$\pi(j_1 + 1) = b_1$, тоді $S_{j_1+1} > 1$

$\pi(j_1 + 2) = a_{j_1+1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + j_2) = a_{j_1+j_2-1}$, де $S_{j_1+j_2} > 2 - x_{b_2}$:

$\pi(j_1 + j_2 + 1) = b_2$, тоді $S_{j_1+j_2+1} > 2$:

……..

$\pi(j_1 + \ldots + j_k + 2) = a_{j_1+\ldots+j_k+1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + \ldots + j_k + j_{k+1}) = a_{j_1+\ldots+j_k+j_{k+1}-1}$, де $S_{j_1+\ldots+j_k+j_{k+1}} > k - x_{b_k}$

$\pi(j_1 + \ldots + j_k + j_{k+1} + 1) = b_k$, тоді $S_{j_1+\ldots+j_k+j_{k+1}+1} > k$

……

Якщо $j_1 + j_2 + \ldots + j_k < m \le j_1 + j_2 + \ldots + j_{k+1}$, то $S_m > k$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \infty$. ■

11.6 Арифметичні операції над збіжними рядами

Вже було доведено, що

1) $\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n - зб \\ c \neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\sum\limits_n (ca_n)}_{зб} = c\underbrace{\sum\limits_n a_n}_{зб}$

2) $\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n - зб \\ \sum\limits_n b_n - зб\end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_n (a_n \pm b_n) - зб \wedge \sum\limits_n (a_n \pm b_n) = \sum\limits_n a_n \pm \sum\limits_n b_n$

Розглянемо добуток рядів

$$\sum_n a_n \cdot \sum_n b_n = (a_1 + a_2 + ...)\cdot(b_1 + b_2 + ...) = \sum_{i,j} a_i b_j = \sum_n w_n ,$$

тут сума $\sum\limits_{i,j} a_i b_j$ розглядається по усім різноманітним добуткам $a_i b_j$ членів двох рядів

Поставимо запитання: коли буде мати місце інплікація

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n - зб \\ \sum\limits_n b_n - зб\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \sum_n w_n - зб ,$$

а разом з нею рівність

$$\sum_n w_n \overset{?}{=} \sum_n a_n \sum_n b_n \ ?$$

Позитивні відповіді на ці запитання здійснюються у двох випадках:

1) $\sum\limits_n a_n$ і $\sum\limits_n b_n$ - абсолютно збігається;

2) один із рядів збігається абсолютно, а інший хоча б умовно, тоді буде збігатися ряд спеціального виду:

$$\sum_n w_n = \underbrace{a_1 b_1}_{2} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{3} + \underbrace{a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1}_{4} + ...$$

Якщо ми будемо розглядати ряд $\sum\limits_{i,j} a_i b_j$ з членами, розташованними довільним чином, то у другому випадку жодного висновку зробити буде не можна.

Випадок 2) доведено в теоремі Мертенса. Розглянемо випадок 1).

Теорема. $\left.\begin{array}{l}\sum\limits_n a_n - абс.\ зб.\ до\ A \\ \sum\limits_n b_n - абс.\ зб.\ до\ B\end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_n w_n = \sum\limits_{i,j} a_i b_j - зб.$

Просумований у будь-якому порядку ряд $\sum\limits_n w_n = \sum\limits_{i,j} a_i b_j$ так, щоб були присутні усі можливі комбінації добутків $a_i b_j$ збігається до значення добутку сум двох рядів, тобто

$$\sum_n w_n = \sum_n a_n \cdot \sum_n b_n = A \cdot B .$$

Доведення. Нехай $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $A = \sum\limits_n a_n$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $B = \sum\limits_n b_n$;

$$A^*_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| , \quad A^* = \sum_n |a_n| , \quad B^*_n = \sum_{k=1}^{n} |b_k| , \quad B^* = \sum_n |b_n|$$

Розглянемо часткову суму ряду $\sum\limits_n w_n = \sum\limits_{i,j} a_i b_j$, а саме: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$, а разом з нею множину

$M_n = \{ a_i b_j$, такі що містяться в частковій сумі $S_n \}$.

Позначимо найбільший із номерів членів двох рядів, що присутні в цій множині через m (цей номер, звичайно, залежить від n), тобто

$$m = \max \left\{ i, j : a_i b_j \in M_n \right\} .$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} |W_k| \le \left(|a_1| + |a_2| + ... + |a_m| \right) \cdot \left(|b_1| + ... + |b_m| \right) \le A^*_m \cdot B^*_n \le A^* \cdot B^* .$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Часткові сума ряду } \sum\limits_n |w_n| \text{ обме-} \\ \text{жені зверху;} \\ \text{ряд } \sum\limits_n |w_n| \text{ - знакопостійний}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits_n |w_n| - зб. \Rightarrow \sum\limits_n w_n - абс.зб$

Знайдемо тепер суму ряду $\sum\limits_n w_n$. Цей ряд абсолютно збігається, тому він задовольняє комутативній і асоціативній властивостям. Переставимо члени цього ряду так, щоб послідовність часткових сум переставленого ряду містила послідовність.

$a_1 \cdot b_1 = W_1$

$(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 = W_4$

$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = W_9$

.....

Отриманий ряд переставлений і перегрупований збігається до тієї ж суми, що і будь-який інший ряд $\sum_n w_n = \sum_{i,j} a_i b_j$, отриманий із усіляких добутків $a_i b_j$, тому

$$\lim_n \underbrace{W_{n^2}}_{\sum_n W_n} = \lim_n A_n \lim_n B_n = A \cdot B \,. \blacksquare$$

Теорема Мертенса. Якщо один із рядів $\sum_n a_n$ чи $\sum_n b_n$ збігається абсолютно, а інший хоча б умовно, тоді буде збігатися ряд спеціального виду:

$$\sum_n w_n = \underbrace{a_1 b_1}_{2} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{3} + \underbrace{a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1}_{4} + \ldots$$

зб. до добутку значень сум цих рядів, тобто

$$\sum_n w_n = \sum_n a_n \cdot \sum_n b_n = A \cdot B \,.$$

Доведення вивчити за бажанням самостійно!

11.7. Нескінченні добутки

🗁**Означення.** Формально записаний добуток членів послідовності $\{a_n\}$ вигляду

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається *нескінченним добутком;*

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються членами нескінченного добуток;

$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ - частковий добуток.

🗁**Означення.** Якщо існує скінченна, не рівна нулю, границя часткових добутків, тоді нескінченний добуток називається збіжним, тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збіжний } P_n \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim_n P_n = P \wedge P \neq 0 \wedge P \neq \infty \,.$$

Значення границі $P = \lim_n P_n$ називається *значенням нескінченного добутку* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, позначення: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$.

Зауваження 1. Нескінченні добутки і послідовності взаємопов'язані:

неск. добутку $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ відповідає послідовність часткових добутків P_n,

послідовності $\{P_n\}$ відповідає нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ з членами

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n11}} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}{a_n \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}.$$

Теорема (*необхідна умова збіжності нескінченного добутку*). Якщо $\prod_{n=1}^{\infty} a_n - зб$, тоді $\lim_n a_n = 1$.

Доведення. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ -збіжна $\Rightarrow \exists \lim_n P_n = P \wedge P \neq 0 \wedge P \neq \infty$.

Тоді $\lim_n a_n = \lim_n \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_n P_n}{\lim_n P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$. ■

Зауваження 2. Оскільки границя послідовності часткових добутків для збіжного добутку не обертається в нуль, то добутки , в яких , хоча б один із членів дорівнює нулю – не розглядаються.

Зауваження 3. Згідно до необхідної умови збіжності нескінченних добутків $\lim_n a_n = 1$, тому, починаючи з якогось номеру, усі члени нескінченного добутку будуть мати додатні знаки, тобто

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n > 0$.

Приклад. Дослідити нескінченний добуток на збіжність за означенням і знайти значення нескінченного добутку $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Частковий добуток

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \cos\frac{x}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$$

спростимо. Для цього домножимо його на $\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$:

$$P_n = \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^3} \ldots \cos\frac{x}{2^{n-2}} \cos\frac{x}{2^{n-1}} \cos\frac{x}{2^n} \sin\frac{x}{2^n}.$$

Оскільки $\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$,

$$\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2^{n-1}},$$

$$\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{8}\sin\frac{x}{2^{n-3}},$$

то

$$P_n=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\frac{1}{2^n}\sin\frac{x}{2^{n-n}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x.$$

Перевіримо останній узагальнюючий висновок за індукцією. Для $n=1$ ця рівність здійснюється. Припустимо, закономірність для P_n є вірною. Доведемо її для P_{n+1}:

$$P_{n+1}=P_n\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\sin x.$$

Згідно до принципу мат. індукції рівність $P_n=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x$ здійснюється для усіх натуральних номерів n. Знайдемо границю часткових добутків:

$$\lim_n P_n=\lim_n\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x=\lim_n\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\sin x=\frac{\sin x}{x}.$$

Висновок: нескінченний добуток збігається, крім того, $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{x}$.

Встановимо зв'язок між нескінченними добутками і рядами. Маємо: $P_n=\prod_{k=1}^{n}a_k$ - частковий добуток, нехай $a_k>0\ \forall k\in\mathbb{N}$, тоді $\ln P_n=\ln\prod_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\ln a_k=S_n$-часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n$, а $\ln P_n=S_n$.

Нехай $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ *– зб* $\Rightarrow\exists\lim_n P_n=P\neq 0\wedge\neq\infty$,

Оскільки $f(x)=\ln x - \textit{неперервна} \Rightarrow \exists \lim_n \ln P_n = \ln \lim_n P_n = \ln P$. До того ж, значення нескінченного добутку і сума ряду пов'язані рівністю:

$\ln P=S$.

Нехай тепер $\sum_n \ln a_n - зб \Rightarrow \exists \lim_n S_n = S$. Тоді

$P_n = e^{S_n} \wedge g(x) = e^x$ - неперервна $\Rightarrow \exists \lim_n e^{S_n} = e^{\lim_n S_n} = e^S$.

До того ж, сума ряду і значення нескінченного добутку пов'язані рівністю $P = e^S$, яка еквівалентна отриманій раніше.

Таким чином, доведено теорему.

Теорема. Нескінченний добуток $\prod_n a_n$ і ряд $\sum_n \ln a_n$, де $a_n > 0$ $\forall n \in N$ – збігаються або розбігаються одночасно, а значення P нескінченного добуток і S суми ряду пов'язані рівністю

$$\ln P=S \text{ або } P = e^S.$$

Зауваження 4.

Якщо $\lim_n P_n = P = +\infty$, то $\ln P = \ln(+\infty) = +\infty$, тобто ряд $\sum_n \ln a_n$ розбігається. Якщо $\lim_n P_n = P = 0$, то $\ln P = \ln 0 = -\infty$, тобто ряд $\sum_n \ln a_n$ розбігається. Ось чому обидва випадки, коли $\lim_n P_n = P = 0$ і $+\infty$ відносять до випадків розбіжності нескінченного добутку.

Термінологія

$\lim_n P_n = P = +\infty \Rightarrow \prod_n a_n$ - *розб. до* $\infty \Leftrightarrow$ ряд $\sum_n \ln a_n$ розбігається до $+\infty$;

$\lim_n P_n = P = 0 \Rightarrow \prod_n a_n$ - *розб. до 0* $\Leftrightarrow$ ряд $\sum_n \ln a_n$ розбігається до $-\infty$.

Теорема. Добуток $\prod_n (1+V_n)$ - зб., де V_n мають один знак $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ ряд $\sum_n V_n$ збігається.

Доведення. *Необхідність.* $\prod_n (1+V_n)$ -зб $\Rightarrow$ $\lim_n (1+V_n) = 1 \Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ 1+V_n > 0 \Rightarrow$ за попередньою теоремою добуток $\prod_n (1+V_n)$ є збіжним одночасно з рядом $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1+V_n)$.

Оскільки $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ 1+V_n > 0 \Rightarrow V_n > -1\ \forall n \ge n_0$, а також $V_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $V_n \in (-1,0)\ \forall n \ge n_0$. Крім того, $\lim\limits_n (1+V_n) = 1 \Rightarrow \lim\limits_n V_n = 0$. Отже, можна застосувати ознаку порівняння в граничній формі:

$$\ln(1+V_n) \sim V_n,$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1+V_n) \text{ - зб } \Rightarrow \sum_n V_n \text{ - зб.}$$

Отже, $\prod\limits_n (1+V_n)$ - зб. $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \ln(1+V_n)$ -зб. $\Rightarrow \sum\limits_n V_n$ -зб.

Достатність перевірити самостійно! ■

🗁**Означення.** Нескінченний добуток називається абсолютно збіжним, якщо абсолютно збіжним є ряд $\sum\limits_n \ln(1+V_n)$).

Теорема. Добуток $\prod\limits_n (1+V_n)$ -абсолютно збіжний $\Rightarrow i \Leftarrow$, коли $\Rightarrow \sum\limits_n V_n$ -абсолютно збіжний.

► $\prod\limits_n (1+V_n)$ абс. зб. $\Leftrightarrow \sum\limits_n \left|\ln(1+V_n)\right|$ -зб $\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} \left|\ln(1+V_n)\right| \sim \left|V_n\right| \\ зб. \quad \Leftrightarrow зб \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \sum\limits_n \left|V_n\right|$ -зб. ◄

Приклад. 1. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\frac{1}{k} > 0\ \ \forall k \in \mathbb{N}$ і

$\sum\limits_k \frac{1}{k}$ -розбігається до $+\infty$ $\Rightarrow \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ -розбігається до ∞.

2. $\sum\limits_k \left(-\frac{1}{k+1}\right) = -\infty \Rightarrow \prod\limits_n \left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ -розбігається до $e^{-\infty}$ =0.

3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)$, збігається, коли $\alpha > 1$ і розбігається, коли $\alpha \le 1$ до ∞.

4. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)$ збігається, коли $\alpha > 1$ і розбігається, коли $\alpha \le 1$ до 0.

Твердження. Нескінченний добуток збіжний $\Rightarrow i \Leftarrow$, коли послідовність його залишків прагне до 1. Тобто

$$\prod_n a_n - зб \Rightarrow i \Leftarrow \lim_n r_n = \lim_n \prod_{k=n+1}^{\infty} a_n = 1$$

► $\prod\limits_n a_n - зб \Leftrightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \ln a_n - зб \Leftrightarrow \lim\limits_n \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \ln a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_n \ln \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_n \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1.$ ◄

Мають місце наступні співвідношення, доведення яких виноситься на самостійне опрацювання:

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)\ (\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \text{добуток збіжний}),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),$$

$$sh\, x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

$$ch\, x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$