ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кафедра математичного аналізу

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З СПЕЦКУРСУ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Затверджено
на засіданні кафедри
математичного аналізу

І. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Курс «Інтегральні рівняння» є необхідною складовою частиною теоретичної підготовки студента-математика та основою для подальшого вивчення інших дисциплін.

Він дає можливість засвоїти основні теоретичні відомості, практичні вміння і навички з теорії функцій комплексної змінної та її застосувань.

Курс «Інтегральні рівняння» розрахований на студентів 3 курсу математичного факультету спеціальності « Математика».

Курс «Інтегральні рівняння» складається з 2 модулів.

Методичні матеріали містять всю інформацію, необхідну для забезпечення проведення практичних занять зі студентами, а саме:

- тематику практичних занять;
- методичні рекомендації, контрольні запитання та завдання для самостійної роботи;
- рекомендовану літературу.

1. ТЕМАТИКА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1.Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.

Тема 2. Інтегральне рівняння Вольтерра 2–го роду.

Тема 3. Зв'язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями.

Тема 4. Аналітичне розв’язання рівняння Вольтерра 2-ого роду.

Тема 5. Рівняння Вольтера 2-го роду типу згортки.

Тема 6. Рівняння Вольтера 1-го роду.

Тема 7. Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду.

Тема 8. Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром.

Тема 9. Альтернатива Фредгольма.

Тема 10. Рівняння Фредгольма 2-го роду із симетричним ядром.

Тема 11. Додаткові відомості.

Тема 12. Нелінійні інтегральні рівняння.

2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

1. Класифікація інтегральних рівнянь. Фізичні приклади.

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

або

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x). \tag{1.2}$$

Тут $K(x,t)$, $f(x)$ – задані функції, λ – комплексний параметр, $\varphi(x)$ – шуканий розв’язок. Функції $K(x,t)$ та $f(x)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння.

Інтегральні рівняння класифікуються таким чином:

1) якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, то рівняння називається інтегральним рівнянням першого роду. Такими є рівняння

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.3}$$

або

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \qquad (1.4)$$

Рівняння (1.1) і (1.2), в яких шукана функція міститься також і поза інтегрального доданку називається рівнянням другого роду;

2) якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається рівнянням Фредгольма (випадок (1.1) і (1.2)). Якщо ж межі інтегрування змінні (випадок (1.3) і (1.4)), то інтегральне рівняння називається рівнянням Вольтера;

Формально рівняння Вольтера можна розглядати як частинний випадок рівняння Фредгольма, поклавши, наприклад, в (1.2.) $K(x,t) \equiv 0$ при $t > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтера і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь істотно різні. Тому рівняння Вольтера виділяють в особливий тип рівнянь;

3) рівняння (1.1) - (1.4) називаються однорідними, якщо $f(x) \equiv 0$. В супротивному випадку ці рівняння називаються неоднорідними.

Розв'язком інтегрального рівняння називається функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння, перетворює його в тотожність по x.

Одними з перших відомих інтегральних рівнянь були так звані парні інтегральні рівняння. Це пари рівнянь-рівностей, що визначають відповідні типи нескінчених інтегральних перетворень, як, наприклад, перетворень Фур'є

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} y(x)dx, \quad t \in R,$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} Y(t)dx.$$

Парними ці рівняння називають тому, що якщо в одній з таких рівностей під знаком інтеграла множник ядра інтегрального перетворення вважати невідомим (саме в цьому випадку ці рівності є інтегральними рівняннями), то інша парна до неї рівність є формулою, за якою визначається шуканий розв'язок рівняння.

Розглянемо деякі задачі, розв'язки яких знаходяться за допомогою інтегральних рівнянь.

1. **Задача Абеля** – це перша задача, яка привела до розв'язання інтегральних рівнянь. Вона полягає в наступному: матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається в вертикальній площині (ξ, η) по деякій кривій. Необхідно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка почав свій рух без початкової швидкості в точці кривої з ординатою *x*, досягла осі $O\xi$ за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція.

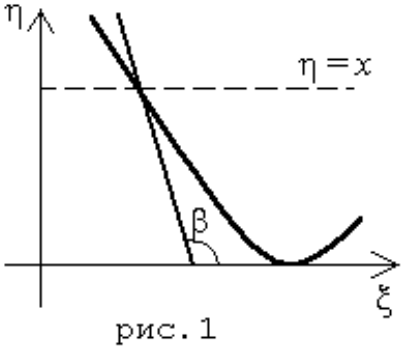


рис. 1

Розв'язання. Абсолютна величина швидкості точки, що рухається обчислюється за формулою $v = \sqrt{2g(x-\eta)}$. Нехай $\beta = \beta(\eta)$ – кут

нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 1). Тоді будемо мати $\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$.

Звідси $dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}$. Проінтегруємо останній вираз від 0 до x і покладемо $\frac{1}{\sin\beta} = \varphi(\eta)$. Одержимо

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g} f_1(x). \tag{1.5}$$

Нехай $f(x) = -\sqrt{2g} f_1(x)$. Тоді (1.5) запишеться у вигляді

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = f(x), \tag{1.6}$$

де $\varphi(\eta)$ – невідома, а $f(x)$ – відома функції. Рівняння виду (1.6) називають інтегральним рівнянням Абеля. Воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду.

З (1.6) одержимо $\varphi(\eta)$ і складемо рівняння шуканої кривої. Дійсно $\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin\beta}$, тоді $\eta = \Phi(\beta)$. Далі

$$d\xi = \frac{d\eta}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\mathrm{tg}\beta}, \quad \xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{\mathrm{tg}\beta} d\beta = \Phi_1(\beta).$$

Таким чином, крива визначається параметричними рівняннями: $\xi = \Phi_1(\beta)$, $\eta = \Phi(\beta)$. Зокрема, коли $f(x) = C = \mathrm{const}$ такою кривою є циклоїда.

Рівняння Абеля є одним з інтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, не використовуючи диференціальні рівняння.

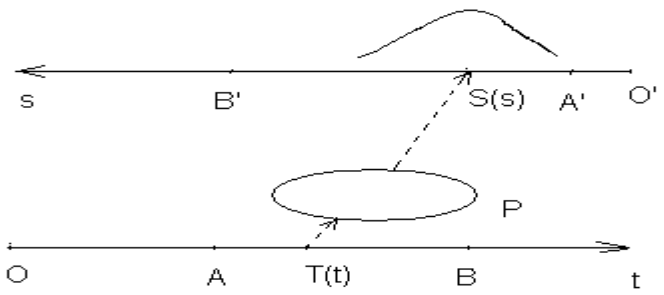
Рівняння

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), \tag{1.7}$$

де α – стала, $0 < \alpha < 1$, називається узагальненим рівнянням Абеля. Будемо вважати, що функція $f(x)$ має неперервну похідну на деякому відрізку $[0,a]$.

2. Задача про розподіл яскравості світла. Згідно із законом геометричної оптики, зображення об’єкта подібно до самого об’єкта, таким чином відрізок відображується у відрізок, при цьому довжина відрізків в загальному випадку різна.

В заданій системі лінз прилада P оберемо масштаб на вісях Ot і Os так, щоб для двох взаємно відповідних точок $T(t)$ і $S(s)$ мала місце рівність $s = t$.



Точка $T(t)$ об'єкта AB, що світиться, впливає на освітлення всього зображення $A'B'$, причому найбільша яскравість освітлення в точці $S(s)$. Таким чином , інтенсивність освітлення K є функцією від s та t, т.т. $\mathrm{K}=\mathrm{K}(s,t)$.

Нехай $\eta(t)$ - щільність яскравості об'єкта. Тоді величина $\eta(t)\mathrm{K}(s,t)\Delta t$ визначає наближене значення яскравості зображення в точці $S(s)$, який породжується елементом об'єкта Δt, що світиться. В даному прикладі величина $\mathrm{K}(s,t)$ визначається властивостями оптичного приладу Р.

Яскравість зображення в точці $S(s)$, згідно за принципом суперпозиції, можна наближено надити у вигляді

$$\sum_k \eta(t_k)\mathrm{K}(s,t_k)\Delta t_k \,. \qquad (1.8)$$

Нехай довжина відрізка AB дорівнює l. Знайдемо границю (1.8) при $\max \Delta t_k \to 0$ і дістанемо розподіл яскравості зображення у вигляді

$$\varphi(\mathrm{s}) = \int_0^l \mathrm{K}(s,t)\eta(t)dt \,. \qquad (1.9)$$

В залежності від постановки фізичної задачі із (1.9) отримаємо різні типи інтегральних рівнянь. Функція $\mathrm{K}(s,t)$ є відомою функцією, що визначається властивостями оптичного прилада. Якщо щільність яскравості зображення $\varphi(s)$ відома, а потрібно знайти розподіл яскравості об'єкта , яке надає задану яскравість зображення, тоді $\varphi(s)$ - задана функція, $\eta(s)$ - шукана. Отже (1.9) – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

У випадку, коли зображення таке, що крім геометричного подобія, яскравість зображення також подібна яскравості об'єкта, то $\varphi(s)$ і $\eta(s)$ пропорційні, т.т. $\varphi(s) = \dfrac{1}{\lambda}\eta(s)$, і (1.9) перетворюється в однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^l \mathrm{K}(s,t)\varphi(t)dt \,,$$

де $\varphi(s)$ - шукана функція. При цьому виникає питання: чи може коефіцієнт пропорційності приймати будь-яке значення, а якщо це не так, то для яких λ фізична задача має розв'язок.

Якщо змінити фізичну постановку і вимагати, щоб різниця яскравості між точкою об'єкта і точкою зображення мала всюди задану величину $f(s)=\eta(s)-\varphi(s)$, то підставляючи в (1.9) $\varphi(s)=\eta(s)-f(s)$, отримаємо неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$f(s)=\eta(s)-\lambda\int_0^l \mathrm{K}(s,t)\eta(t)dt,$$

де $\eta(s)$ - шукана функція.

3. Задача Коші для звичайного лінійного диференційного рівняння n-го порядку з неперервними коефіцієнтами може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду. Покажемо це на прикладі диференційного рівняння 2-го порядку.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=F(t), \tag{1.10}$$

$$x(0)=C_0, \quad x'(0)=C_1. \tag{1.11}$$

Нехай

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t). \tag{1.12}$$

Враховуючи початкові умови та формулу

$$\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n} f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds,$$

послідовно знаходимо $\quad \dfrac{dx}{dt}=\displaystyle\int_0^t \varphi(s)ds+C_1,$

$$x(t)=\int_0^t (t-s)\varphi(s)ds+C_1t+C_0. \tag{1.13}$$

На підставі (1.12), (1.13) рівняння (1.10) можна записати

$$\varphi(t)+\int_0^t [a_1(t)+a_2(t)(t-s)]\varphi(s)ds=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t). \tag{1.14}$$

Покладемо

$$\mathrm{K}(t,s)=-[a_1(t)+a_2(t)(t-s)], \quad f(t)=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t).$$

Тоді (1.14) набуває вигляду

$$\varphi(t)=\int_0^t \mathrm{K}(t,s)\varphi(s)ds+f(t). \tag{1.15}$$

Таким чином задача Коші (1.10), (1.11) звелась до розв'язання інтегрального рівняння (1.15). Знайдену функцію $\varphi(t)$ підставимо в друге співвідношення (1.13) і отримаємо розв'язок $x(t)$ задачі (1.10), (1.11).

Існування єдиного розв'язку рівняння (1.15) випливає з існування єдиного розв'язку задачі Коші (1.10), (1.11) для лінійного диференційного рівняння з неперервними коефіцієнтами в околі точки $t=0$.

Неважко бачити, що у випадку коли коефіцієнти $a_i(t), \quad i=\overline{1,n}$ сталі, ядро відповідного інтегрального рівняння залежить тільки від різниці аргументів $\mathrm{K}(t,s)=\mathrm{K}(t-s)$ (інтегральне рівняння типу згортки).

Приклади розв'язування рівнянь

Приклад 1. Показати, що функція $\varphi(x)=\sin x$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтера $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x (t-x)\varphi(t)dt$.

Розв'язання. Рівняння запишемо у вигляді $\varphi(x)-\int\limits_0^x (t-x)\varphi(t)dt=x$ та розглянемо ліву частину. Замість $\varphi(x)$ підставимо функцію sin *x*. Маємо

$$\sin x-\int\limits_0^x (t-x)\sin t\,dt=\sin x-\int\limits_0^x t\sin t\,dt+x\int\limits_0^x \sin t\,dt=$$
$$=\sin x+x\cos x-\sin x-x\cos x+x=x.$$

Отже $x=x$. Це означає, що функція $\varphi(x)=\sin x$ є розв'язком даного інтегрального рівняння.

Приклад 2. Скласти інтегральне рівняння, що відповідає диференційному рівнянню

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(1+t^2)x(t)=\cos t \tag{1.16}$$

і початкових умовах

$$x(0)=0, \quad x'(0)=2.$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t)$. Тоді

$$\frac{dx}{dt}=\int\limits_0^t \varphi(s)ds+2, \;\; x(t)=\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds+2t.$$

Підставимо вираз для $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ та $x(t)$ в диференційне рівняння (1.16). Маємо

$$\varphi(t)=-\int\limits_0^t (1+t^2)(t-s)\varphi(s)ds+\cos t-2t(1+t^2).$$

Контрольні запитання

1. Які рівняння називають інтегральними рівняннями Фредгольма 1-го та 2-го роду?
2. Які рівняння називають інтегральними рівняннями Вольтерра 1-го та 2-го роду?

3. Дати визначення розв'язку інтегрального рівняння.
4. Які рівняння називають однорідними?
5. Яке рівняння називається узагальненим рівнянням Абеля?
6. В чому полягає задача Абеля?
7. Які задачі приводять до інтегральних рівнянь Вольтера?

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. Перевірити, які з даних функцій є розв'язками вказаних інтегральних рівнянь:

1. $\varphi(x)=2e^x\left(x-\frac{1}{3}\right),\quad \varphi(x)+2\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt=2xe^x$;

2. $\varphi(x)=\cos x,\quad \varphi(x)-\int\limits_0^{\pi}(x^2+t)\cos t\,\varphi(x)dt=\sin x$;

3. $\varphi(x)=1-x,\quad \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt=x$;

4. $\varphi(x)=xe^x,\quad \varphi(x)=e^x\sin x+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$.

Задача 2. Класифікувати наступні рівняння:

1. $\varphi(x)=1+x+\int\limits_1^2 \frac{\varphi(t)}{x^2+t^2+\varphi(t)}dt$; 2. $\varphi(x)=e^x-1+\int\limits_0^x \frac{\sin\varphi(t)}{1+x^4+t^2\varphi^2(t)}dt$;

2. $\int\limits_0^2 \frac{\varphi^3(t)dt}{1+x^2+t\varphi^4(t)}=\cos x^2-1$; 3. $\int\limits_0^x \frac{\cos\varphi(t)dt}{e^{x+t}+\varphi^4(t)}=\frac{1}{1+x^2}-1$.

Задача 3. Показати, що при $f(x)\equiv C=\text{const}$ розв′язком рівняння Абеля є циклоїда. (Задача про маухотрон: знайти криву, рухаючись вздовж якої без тертя важка частина досягає свого самого низького положення за один і той же час незалежно від її початкового наближення).

Задача 5. Скласти інтегральні рівняння, які відповідають наступним задачам Коші

а) $y''-5y'+6y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1;$

б) $y''-y'\sin x+e^x y=x;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$.

1.2. Метод послідовних наближень

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.1}$$

де функція $f(x)$ неперервна при $x\in[a,b]$; а ядро $K(x,t)$ неперервне в області $\Omega=\{a\le x\le b,\ a\le t\le b\}$.

В подальшому будемо використовувати норми функцій та скалярний добуток в просторах $L_2(a,b)$ і $C[a,b]$, які визначаються наступним чином

$$(f,g)_{L_2(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f,g \in L_2(a,b);$$

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad f \in L_2(a,b); \quad \|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in C[a,b].$$

Інтегральний оператор **K,** що визначається формулою $(\mathbf{K}f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad x \in [a,b]$, з неперервним ядром $K(x,t)$ відображує $L_2(a,b)$ в $C[a,b]$, $C[a,b]$ в $C[a,b]$ та $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$ є обмеженим і

$$\|\mathbf{K}f\|_{C[a,b]} \le M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(a,b)}, \quad f \in L_2(a,b), \tag{2.2}$$

$$\|\mathbf{K}f\|_{C[a,b]} \le MV\|f\|_{C[a,b]}, \quad f \in C[a,b], \tag{2.3}$$

$$\|\mathbf{K}f\|_{L_2(a,b)} \le MV\|f\|_{L_2(a,b)}, \quad f \in L_2(a,b), \tag{2.4}$$

де $M = \max_{x,t\in[a,b]} |K(x,y)|, \quad V = \int_a^b dt = b - a$.

Дійсно, нехай $f \in L_2(a,b)$. Тоді f – абсолютно інтегрована функція на $C[a,b]$. Оскільки ядро $K(x,t)$ неперервне в Ω, то функція $(\mathbf{K}f)(x)$ неперервна на $[a,b]$. Тому оператор **K** відображує $L_2(a,b)$ в $C[a,b]$ і за нерівністю Коші-Буняковського є обмеженим:

$$\|\mathbf{K}f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |(\mathbf{K}f)(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^b K(x,t)f(t)dt\right| \le$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} \sqrt{\int_a^b |K(x,t)|^2 dt}\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \le M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(a,b)}.$$

Аналогічно доводяться нерівності (2.3) та (2.4).

Для розв'язування рівняння (2.1) застосуємо один з варіантів методу послідовних наближень – метод Пікара. Нехай

$$\varphi_0(x) = f(x), \qquad \varphi_p(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_{p-1}(t)dt, \quad p = 0,1,\ldots. \tag{2.5}$$

Покажемо, що

$$\varphi_p = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k \mathbf{K}^k f, \quad p = 0,1,\ldots, \tag{2.6}$$

де $\mathbf{K}^k$ – степені оператора **K**.

Дійсно, Формула (2.6) справедлива коли $k = 0$: $\varphi_0(x) = f(x)$. Нехай (2.6) має місце при $k = p$. Обчислимо φ_{p+1}. Маємо

$$\varphi_{p+1} = \lambda \mathbf{K}\varphi_p + f = \lambda \mathbf{K}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k \mathbf{K}^k f + f = f + \sum_{k=0}^{p}\lambda^{k+1}\mathbf{K}^{k+1} f = \sum_{k=0}^{p+1}\lambda^k \mathbf{K}^k f .$$

Таким чином формула (2.6) вірна при всіх *k*. Розв'язок (2.1) має вигляд $\varphi(x) = \lim\limits_{p\to\infty}\varphi_p(x)$.

За початкове наближення можна взяти і довільну функцію відповідного простору. Метод Пікара є частинним випадком методу послідовних наближень саме тому, що $\varphi_0(x) = f(x)$. Функції $\varphi_p(x), \quad p = 1,2,...$ розглядаються як наближення до розв'язку рівняння (2.1).

Інтегральне рівняння Фредгольма (2.1) з неперервним ядром $K(x,t)$ має єдиний розв'язок $\varphi(x)$ в $C[a,b]$ для довільного вільного члена $f \in C[a,b]$, коли $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$. Цей розв'язок надається у вигляді регулярно збігаючогося ряду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k (\mathbf{K}^k f)(x) \tag{2.7}$$

і задовольняє оцінку

$$\|\varphi\|_{C[a,b]} \le \frac{\|f\|_{C[a,b]}}{1-|\lambda|MV} \tag{2.8}$$

Якщо виконується умова $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$, де $B = \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(x,t)dxdt\right)^{1/2}$, то послідовність (2.5) збігається до розв'язку рівняння (2.1) в метриці $L_2[a,b]$. Величина похибки *p*-го наближення визначається нерівністю

$$\left|\varphi(x) - \varphi_p(x)\right| \le AB^{-1}|\lambda B|^p\left(\|\varphi_0\|_{L_2(a,b)} + \frac{\|f\|_{L_2(a,b)}}{1-|\lambda B|}\right), \tag{2.9}$$

де $A = \left(\max\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^b K^2(x,t)dt\right)^{1/2}$.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтера 2-го роду

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.10}$$

де $f \in C[0,a]$, ядро $K(x,t)$ неперервне в замкнутому трикутнику $0 \le y \le x \le a$. В цьому випадку $|K(x,t)| \le M$, а інтегральний оператор $(\mathbf{K}f)(x) = \int\limits_0^x K(x,t)f(t)dt$ відображує $C[0,a]$ в $C[0,a]$.

Розв'язок (2.10) будемо шукати методом послідовних наближень.

Інтегральне рівняння Вольтера (2.10) з неперервним ядром $K(x,t)$ і $f(x) \in C[a,b]$, при довільному λ має єдиний розв'язок в класі $C[a,b]$ і розв'язок задовольняє оцінку

$$\|\varphi\|_{C_{[a,b]}} \le \|f\|_{C_{[a,b]}} e^{|\lambda| Ma} . \qquad (2.11)$$

Метод послідовних наближень може бути застосований до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтера наступного вигляду

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x,t,\varphi(t))dt . \qquad (2.12)$$

Як у випадку лінійних інтегральних рівнянь, будемо шукати розв'язок (2.12) як границю послідовності $\{\varphi_n(x)\}$, де, наприклад, $\varphi_0(x) = f(x)$, а елементи $\varphi_p(x)$ послідовно обчислюються за формулою

$$\varphi_p(x) = f(x) + \int_0^a F(x,t,\varphi_{p-1}(t))dt, \quad p = 1,2,\ldots. \qquad (2.13)$$

Якщо $f(x)$ та $F(x,t,z)$ сумовні з квадратом і задовольняють умові

$$|F(x,t,z_2) - F(x,t,z_1)| \le a(x,t)|z_2 - z_1|, \quad \left|\int_0^x F(x,t,f(t)dt\right| \le n(x), \qquad (2.14)$$

де функції $a(x,t)$ і $n(x)$ такі, що в області $0 \le t \le x \le a$

$$\int_0^a n^2(x)dx \le N^2, \quad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x,t)dt \le A^2,$$

то нелінійне інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду (2.12) має єдиний розв'язок $\varphi(x) \in L_2(0,a)$, який визначається як границя $\varphi_p(x)$, коли $p \to \infty$, де функції $\varphi_p(x)$ обчислюються за рекурентними формулами (2.13). За початкове наближення $\varphi_0(x)$ можна обрати будь-яку функцію з $L_2(0,a)$, для якої виконується умова (2.14).

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Методом послідовних наближень розв'язати рівняння

$$\varphi(x) = x + 4\int_0^1 x^2 t^2 \varphi(t)dt \qquad (2.15)$$

та оцінити похибку наближеного розв'язку.

Розв'язання. Переконаємось, що (2.15) можна розв'язати методом послідовних наближень. Маємо $\lambda = 4, \quad B = \frac{1}{5}$. Тобто, умова існування розв'язку виконується. За початкове наближення оберемо функцію $\varphi_0(x) = x$. Тоді

$$\varphi_1(x) = x + \int_0^1 x^2 t^2 \cdot t dt = x + \frac{x^2}{4},$$

$$\varphi_2(x) = x + \int_0^1 x^2 t^2 \left(t + \frac{t^2}{4}\right) dt = x + \frac{x^2}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\right),$$

$$\varphi_3(x) = x + \int_0^1 x^2 t^2 \left(t + \frac{t^2}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\right)\right) dt = x + \frac{x^2}{4}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right).$$

Неважко бачити, що $\varphi_{p+1}(x)=1+\frac{x^2}{4}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^p}\right)$. Звідси

$\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_{p+1}(x)=x+\frac{x^2}{5}$. Безпосередньою перевіркою можна показати, що

$\varphi(x)=x+\frac{x^2}{5}$ є розв'язком рівняння (2.15). Для оцінки похибки p-го наближення використаємо нерівність (2.9). Маємо

$$\|f\|_{L_2(a,b)}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad A=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \|\varphi_0\|_{L_2(a,b)}=1,\qquad \left|\varphi(x)-\varphi_p(x)\right|\le 5\sqrt{5}\left(\frac{4}{5}\right)^p\left(5+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приклад 2. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x(x-t)\varphi(t)dt,\quad \varphi_0=0$.

Розв'язання. Оскільки $\varphi_0=0$, то $\varphi_1=1$,

$$\varphi_2(x)=x-\int\limits_0^x(x-t)tdt=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}=x-\frac{x^3}{3!},$$

$$\varphi_3(x)=x-\int\limits_0^x(x-t)\left(t-\frac{t^3}{3!}\right)dt=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!},$$

$$\varphi_4(x)=x-\int\limits_0^x(x-t)\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)dt=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}.$$

Очевидно $\varphi_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$. Таким чином $\varphi_n(x)$ – n-та частинна сума ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}=\sin x$. Звідси випливає, що $\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\sin x$. Неважко перевірити, що функція $\varphi(x)=\sin x$ є розв'язком даного інтегрального рівняння.

Приклад 3. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння $\varphi(x)=\int\limits_0^x\frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}dt$ при 1) $\varphi_0(x)=0$, 2) $\varphi_0(x)=x$.

Розв'язання. 1) Нехай $\varphi_0(x)=0$. Тоді $\varphi_1(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{arctg}x$,

$$\varphi_2(x)=\int\limits_0^x\frac{1+\mathrm{arctg}^2t}{1+t^2}dt=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}^3x,$$

$$\varphi_3(x)=\int\limits_0^x\frac{1+\left(\mathrm{arctg}t+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}^3x\right)}{1+t^2}dt=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}^3x+$$

$$+\frac{2}{3\cdot5}\mathrm{arctg}^5x+\frac{1}{7\cdot9}\mathrm{arctg}^7x,$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x+$$

$$+\frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x+\frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\operatorname{arctg}^9 x+\frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\operatorname{arctg}^{11} x+$$

$$+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\operatorname{arctg}^{13} x+\frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\operatorname{arctg}x,\ldots.$$

Позначимо $\operatorname{arctg}x=u$.Порівняємо вираз для $\varphi_p(x)$ з розвиненням

$$\operatorname{tg}u=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}(-1)^{\upsilon-1}\frac{2^{2\upsilon}(2^{2\upsilon}-1)}{(2\upsilon)!}B_{2\upsilon}u^{2\upsilon-1},\quad |u|<\frac{\pi}{2},$$

де B_υ – числа Бернуллі, одержимо $\varphi_p(x)\underset{p\to\infty}{\to}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$. Неважко перевірити, що функція $\varphi(x)=x$ є розв'язком даного інтегрального рівняння.

2) Нехай $\varphi_0(x)=x$. Тоді $\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}dt=x$. Аналогічно знаходимо $\varphi_n(x)=x,\quad n=2,3\ldots.$ Таким чином, послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ є стаціонарною послідовністю $\{x\}$, границя якої $\varphi(x)=x$.

Контрольні запитання

8. В чому полягає метод послідовних наближень?
9. Як визначаються норми в просторах $C[a,b],\quad L_2(a,b)$?
10. За яких умов існує єдиний розв'язок інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтера 2-го роду в класі неперервних функцій?
11. В яких випадках збігається метод послідовних для інтегральних рівнянь Фредгольма в класі функцій L_2?
12. Чи можна за допомогою методу послідовних наближень розв'язувати нелінійні інтегральні рівняння?

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1. За допомогою методу послідовних наближень знайти розв'язки наступних інтегральних рівнянь:

1) $\varphi(x)=1+\frac{1}{20}\int_0^2(1+x)t^2\varphi(t)dt,\quad \varphi_0(x)=1,\quad \left(\varphi(t)=\frac{6+x}{5}\right);$

2) $\varphi(x)=\sin x+\int_{-1}^{1}(\cos x\sin t+\cos 2x\sin 2t)\varphi(t)dt,\quad \varphi_0(x)=\sin x,$

$\left(\varphi(t)=\sin x+\cos x(1-\sin 2)+\frac{3}{4}\cos 2x\sin^3 1\right);$

3) $\varphi(x)=1+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt,\quad \varphi_0(x)=1,\quad (\varphi(x)=\operatorname{ch}x);$

4) $\varphi(x) = x + 1 - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = 1, \quad (\varphi(x) = 1);$

5) $\varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{t^0 \varphi(t)}{1 + t + \varphi(t)} dt.$

Задача 2. Показати, що метод послідовних наближень збігається для довільної $f \in L_2(a,b)$ при $|\lambda| < \frac{1}{B}$ і $K(x,y) \in L_2((a,b) \times (a,b))$, де стала B:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dxdt = B^2 < \infty.$$

1.3 Ітеровані ядра. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма й Вольтерра за допомогою резольвенти

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\,, \tag{3.1}$$

де $f(x) \in C[a,b]$, $K(x,t)$ неперервна функція в області $\Omega = \{a \le x \le b,\ a \le t \le b\}$.

Будемо шукати розв'язок інтегрального рівняння (3.1) у вигляді нескінченного степеневого ряду за степенями λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{3.2}$$

Підставимо цей ряд в (1). Маємо

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)[\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots]dt.$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях λ. Одержимо

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_a^b K_1(x,t)f(t)dt,\\
\varphi_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt,\\
\varphi_3(x) &= \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt
\end{aligned} \tag{3.3}$$

і т. д. З (3.3) випливає

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_1(z,t)dz,$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_2(z,t)dz,$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz\,, \tag{3.4}$$

де $n = 2,3,\ldots,\quad K_1(x,t) \equiv K(x,t)$. Функції $K_n(x,t)$, що визначаються за формулами (3.4) називаються ітерованими (повторними) ядрами.

.

Для ітерованих ядер має місце співвідношення

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,z)K_{n-m}(z,t)dz\,, \tag{3.5}$$

де $m \in N,\quad m < n$.

Функція

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}K_k(x,t) \qquad (3.6)$$

називається резольвентою ядра $K(x,t)$.

Розв'язок інтегрального рівняння (3.1) визначається за формулою:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)\varphi(t)dt, \qquad (3.7)$$

Якщо ядро $K(x,t)$ квадратично-сумовне в Ω, $B=\left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt\right)^{1/2}$, то ряд (3.7) збігається для

$$|\lambda|<\frac{1}{B}. \qquad (3.8)$$

Формула (3.8) визначає границю збіжності (3.7), але розв’язок рівняння (3.1) може існувати і для значень $|\lambda|>\frac{1}{B}$.

Ядра $K(x,t)$ і $L(x,t)$ називають ортогональними, якщо виконується дві умови: $\int_a^b K(x,z)L(z,t)dz=0$, $\int_a^b L(x,z)K(z,t)dz=0$. Наприклад, ядра $K(x,t)=xt$, $L(x,t)=x^2t^2$ ортогональні на відрізку $[-1,1]$. Дійсно,

$$\int_{-1}^{1}(xz)(x^2t^2)dz=0,\ \int_{-1}^{1}(x^2z^2)(xt)dz=0.$$

Існують також ядра, що ортогональні самі до себе. Для таких ядер $K_2(x,t)\equiv 0$, де $K_2(x,t)$ – друге ітероване ядро. В цьому випадку всі наступні ітеровані ядра також дорівнюють нулю, а резольвента співпадає з ядром $K(x,t)$.

Якщо $M(x,t)$ і $N(x,t)$ – два ортогональних ядра, то резольвента $R(x,t;\lambda)$, що відповідає ядру $K(x,t)=M(x,t)+N(x,t)$, дорівнює сумі резольвент $R_1(x,t;\lambda)$ і $R_2(x,t;\lambda)$, які відповідають кожному з цих ядер. Вказану властивість можна узагальнити. Якщо $M^{(1)}(x,t)$, $M^{(2)}(x,t)$, …, $M^{(n)}(x,t)$ попарно ортогональні, то резольвента, що відповідає їх сумі $K(x,t)=\sum_{m=1}^{n}M^{(n)}(x,t)$, дорівнює сумі резольвент, які відповідають кожному з доданків.

Ітеровані ядра $K_n(x,t)$ можна безпосередньо записати за допомогою ядра $K(x,t)$:

$$K_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,z_1)K(z_1,z_2)\ldots K(z_{n-1},t)dz_1dz_2\ldots dz_{n-1}.$$

Ядро $K(x,t)$ називається симетричним, якщо $K(x,t)\equiv K(t,x)$. Якщо ядро $K(x,t)$ – симетричне, то всі ітеровані ядра також симетричні.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтера 2-го роду

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt\,, \tag{3.9}$$

де $K(x,t)$ – неперервна функція при $0 \le x \le a,\ 0 \le t \le x$, а $f(x) \in C[0,a]$. В цьому випадку $|K(x,t)| \le M$.

Як і для інтегрального рівняння Фредгольма (3.1), розв'язок (3.9) будемо шукати у вигляді ряду (3.2). Дістанемо

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = f(x), \\ &\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t) f(t)dt, \\ &\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(x,z) f(z)\,dz\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.10}$$

На підставі (3.10) маємо

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(x,z) f(z)\,dz\right]dt = \int_0^x f(z)dz\int_z^x K(x,t)K(t,z)dt = \int_0^x K_2(x,z) f(z)\,dz,$$

де $\int_0^x K_2(x,z) = \int_z^x K(x,t)K(t,z)dz$. Аналогічно одержимо

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t) f(t)dt, \quad n = 1,2,\ldots\,, \tag{3.11}$$

де $K_n(x,t)$ – ітеровані ядра. Вони визначаються за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} &K_1(x,t) = K(x,t), \\ &K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)dz, \quad n = 1,2,\ldots\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Резольвента інтегрального рівняння Вольтерра (3.9) визначається за допомогою формули (3.6) і відповідає наступному функціональному рівнянню:

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_0^x K(x,z)R(z,t;\lambda)dz\,.$$

За допомогою резольвенти розв'язок інтегрального рівняння (3.9) запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t)dt\ . \tag{3.13}$$

Резольвента інтегрального рівняння Вольтерра (3.9) визначається за допомогою формули (3.6).

Припустимо, що ядро $K(x,t)$ є багаточленом (n-1)-го степеня відносно t і його можна надати у вигляді

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \tag{3.14}$$

де $a_k(x) \in C[0,a]$. Якщо функція $g(x,t;\lambda)$ є розв'язком диференційного рівняння

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)g\right] = 0 \tag{3.15}$$

і задовольняє умовам

$$g\big|_{x=t} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t} = \ldots = \left.\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\right|_{x=t} = 0, \quad \left.\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1, \tag{3.16}$$

то резольвента $R(x,t;\lambda)$ визначається рівністю

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n}. \tag{3.17}$$

Аналогічно, коли $K(x,t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}$, резольвента набуває вигляду $R(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n}$, $g(x,t;\lambda)$ є розв'язком рівняння $\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda\left[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t)g\right] = 0$ і задовольняє умовам (3.16)

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти резольвенту ядра $K(x,t) = xt^2$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le t \le 1$.

Розв'язання. Маємо, $K_1(x,t) = K(x,t) = xt^2$,

$$K_2(x,t) = \int_{-1}^{1} K_1(x,z)K(z,t)dz = \int_{-1}^{1}(xz^2)(zt^2)dz = 0,$$

$$K_3(x,t) = 0, \quad K_n(x,t) = 0.$$

Таким чином , в цьому випадку резольвента ядра дорівнює самому ядру $R(x,t;\lambda) = xt^2$, так що ряд складається із одного члена і збігається при будь-якому λ.

Приклад 2. Знайти резольвенту ядра $K(x,t) = x-1$, $a=0$, $b=1$.

Розв'язання. $K_1(x,t) = K(x,t) = x-1$,

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,z)K_1(z,t)dz=\int_0^1 (x-1)(z-1)dz=-\frac{1}{2}(x-1),$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 K(x,z)K_2(z,t)dz=\int_0^1 (x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(z-1)dz=\frac{1}{4}(x-1),$$

$$K_n(x,t)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1).$$

Приклад 3. Знайти резольвенту ядра $K(x,t)=x+\sin t,\quad a=-\pi,\quad b=\pi$.

Розв'язання.

$K_1(x,t)=K(x,t)=x+\sin t$,

$$K_2(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin z)(z+\sin t)dz=2\pi(x\sin t+1),$$

$$K_3(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin z)\cdot 2\pi(z\sin t+1)dz=(2\pi)^2(x+\sin t),$$

$$K_4(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin z)\cdot(2\pi)^2(z\sin t+1)dz=(2\pi)^3(x\sin t+1),$$

$$K_5(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin z)\cdot(2\pi)^3(z\sin t+1)dz=(2\pi)^4(x+\sin t).$$

Очевидно, що $K_{2n}(x,t)=(2\pi)^{2n-1}(x\sin t+1),\ \ K_{2n-1}(x,t)=(2\pi)^{2n-2}(x+\sin t)$.

Приклад 4. Побудувати резольвенту для ядра $K(x,t)=e^{x+t},\quad a=0,\quad b=1$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $K_1(x,t)=e^{x+t}$,

$$K_2(x,t)=\int_0^1 e^{x+z}\cdot e^{z+t}dz==\frac{e^{x+t}}{2}(e^2-1),$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 e^{x+z}\cdot\frac{e^{z+t}}{2}(e^2-1)dz=\frac{e^{x+t}}{4}(e^2-1)^2,$$

$$K_4(x,t)=\int_0^1 e^{x+z}\cdot\frac{e^{z+t}}{4}(e^2-1)^2dz=\frac{e^{x+t}}{8}(e^2-1)^3,$$

……..……..……..……..……..……..……..……..

$$K_n(x,t)=\frac{e^{x+t}(e^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

На підставі (3.6) маємо

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,x)=e^{x+t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^2-1)^{n-1}\lambda^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{2e^{x+t}}{2\lambda(e^2-1)},\ \text{де}\ |\lambda|<\frac{2}{e^2-1}.$$

Приклад 5. Знайти резольвенту для ядра

$$K(x,t)=xt+x^2t^2,\quad a=-1,\quad b=1.$$

Розв'язання. Як було показано вище, ядра $M(x,t)=xt$ і $N(x,t)=x^2t^2$ ортогональні на [-1,1]. Тому резольвента ядра $K(x,t)$ дорівнює сумі резольвент ядер $M(x,t)$ і $N(x,t)$. Знайдемо ці резольвенти. Маємо

$$M(x,t)=M_1(x,t)=xt,$$

$$M_2(x,t)=\int_{-1}^{1}(xz)(zt)dz=\frac{2}{3}xt,$$

$$M_3(x,t)=\int_{-1}^{1}(xz)\left(\frac{2}{3}zt\right)dz=\left(\frac{2}{3}\right)^2xt,$$

$$M_4(x,t)=\int_{-1}^{1}(xz)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2zt\right)dz=\left(\frac{2}{3}\right)^3xt,$$

……..…….

Неважко бачити, що $M_n(x,t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}xt$. Тоді

$$R_M(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}xt=\frac{3xt}{3-2\lambda},\ |\lambda|<\frac{3}{2}. \qquad (3.18)$$

Знайдемо резольвенту ядра $N(x,t)$.

$$N(x,t)=N_1(x,t)=x^2t^2,$$

$$N_2(x,t)=\int_{-1}^{1}(x^2z^2)(z^2t^2)dz=\frac{2}{5}x^2t^2,$$

$$N_3(x,t)=\int_{-1}^{1}(x^2z^2)\left(\frac{2}{5}z^2t^2\right)dz=\left(\frac{2}{5}\right)^2x^2t^2,$$

……..…….

$$N_n(x,t)=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}x^2t^2.$$

Тоді

$$R_N(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}N_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}x^2t^2=\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},\ |\lambda|<\frac{5}{2}. \qquad (3.19)$$

На підставі (3.18), (3.19) одержимо

$$R_K(x,t;\lambda)=R_M(x,t;\lambda)+R_N(x,t;\lambda)=\frac{3xt}{3-2\lambda}+\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}\ ,\ |\lambda|<\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Знайти резольвенту інтегрального рівняння Вольтерра з ядром 1) $K(x,t)=e^{x-t}$; 2) $K(x,t)=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,t}$.

Розв'язання. 1) Маємо $K_1(x,t)=K(x,t)=e^{x-t}$. Використовуючи (3.12), одержимо

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,z)K_1(x,z)dz=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}dz=e^{x-t}\frac{(x-t)}{1!},$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}\frac{(z-1)}{1!}dz=e^{x-t}\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}\frac{(z-t)^2}{2!}dz=e^{x-t}\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……..……..……..……..……..……..……..……..……..

$$K_n(x,t)=\int_t^x e^{x-z}K_{n-1}(z,t)dz=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=e^{x-t}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Таким чином

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}K_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}e^{x-t}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=e^{x-t}e^{\lambda(x-t)}=e^{(1+\lambda)(x-t)}.$$

2) $$K_1(x,t)=K(x,t)=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t},$$

$$K_2(x,t)=\int_t^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}z}\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}t}dz=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}(x-t),$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}z}\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}t}(z-t)dz=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}z}\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}t}\frac{(z-t)^2}{2!}dz=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……

$$K_n(x,t)=\int_t^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}z}\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}t}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}e^{\lambda(x-t)}.$$

Приклад 7. Знайти резольвенту інтегрального рівняння

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt\ .$$

Розв'язання. В цьому випадку $K(x,t)=x-t$, $\lambda=1$, отже на підставі (3.14) $a_1(x)=1$, решта $a_k(x)=0$. Рівняння (3.15) має вигляд

$$\frac{d^2g(x,t;1)}{dx^2}-g(x,t;1)=0.$$

Звідси $g(x,t;1)=g(x,t)=C_1(t)e^x+C_2(t)e^{-x}$.

З умов (3.16) дістанемо $\begin{cases} C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} = 0 \\ C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t} = 1 \end{cases}$. Із системи знаходимо

$C_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$, $C_2(t) = -\frac{1}{2}e^t$, отже $g(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right) = \mathrm{sh}(x-t)$. Згідно (3.17) отримаємо $R(x,t;1) = [\mathrm{sh}(x-t)]''_x = \mathrm{sh}(x-t)$.

Приклад 8. За допомогою резольвенти знайти розв'язок інтегрального рівняння $\varphi(x) = e^x \sin x + \int\limits_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)dt$.

Розв'язання. Знайдемо ітеровані ядра. Маємо $K_1(x,t) = K(x,t) = e^{x-t}$. Використовуючи (3.12), одержимо

$$K_1(x,t) = K(x,t) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t},$$

$$K_2(x,t) = \int\limits_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}dz = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)}{1!},$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}\frac{(z-t)}{1!}dz = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x,t) = \int\limits_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}\frac{(z-t)^2}{2!}dz = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..

$$K_n(x,t) = \int\limits_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Резольвента для ядра $K(x,t) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}$ при $\lambda = 1$ має вигляд

$$R(x,t;\lambda) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}e^{x-t}.$$

З урахуванням (3.13) шуканий розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = e^x \sin x + \int\limits_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}e^{x-t}e^t \sin t\, dt,$$

$$\varphi(x) = e^x \sin x + e^x(2+\cos x)\ln\frac{3}{2+\cos x} = e^x\left(\sin x + (2+\cos x)\ln\frac{3}{2+\cos x}\right).$$

Приклади для самостійного розв'язування.

Задача 1. Знайти ітеровані ядра вказаних нижче ядер при заданих *a* і *b*:

а) $K(x,t) = e^{|x|+t}$; $a = -1$, $b = 1$, $n = 2$; б) $K(x,t) = e^x \cos t$; $a = 0$, $b = \pi$.

Задача 2. Побудувати резольвенти для наступних ядер

а) $K(x,t) = \sin x \cos t$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$;

б) $K(x,t)=(1+x)(1-t);\ a=-1,\ b=0$;

в) $K(x,t)=\sin x\cos t+\cos 2x\sin 2t;\ a=0,\ b=2\pi$.

Задача 3. Знайти резольвенти для інтегральних рівнянь Вольтерра з наступними ядрами

а) $K(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$; б) $K(x,t)=a^{x-t},\ a>0$;

в) $K(x,t)=2-(x-t),\ \lambda=1$; г) $K(x,t)=-2+3(x-t),\ \lambda=1$.

Задача 4. За допомогою резольвенти розв'язати інтегральні рівняння

а) $\varphi(x)=x3^x-\int\limits_0^x 3^{x-t}\varphi(t)dt$; б) $\varphi(x)=1-2x-\int\limits_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt$.

Приклад 5. Довести, що інтегральне рівняння Вольтерра (3.9) має єдиний розв'язок у класі $C[0,a]$ при довільному λ.

Контрольні запитання.

1. Що називають ітерованим ядром?
2. Що таке резольвента ядра?
3. За яких умов інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерра з неперервним ядром мають єдиний розв'язок у класі неперервних функцій?
4. Як за допомогою резольвенти визначається розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра?
5. Які ядра називаються ортогональними на відрізку $[a,b]$?

1.4. Інтегральне рівняння з виродженим ядром

Ядро $K(x,t)$ інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt+f(x) \tag{4.1}$$

називається виродженим, якщо воно є сумою скінченного числа добутків функцій тільки від *x* на функції від аргументу *t*, тобто якщо ядро має вигляд

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(x), \tag{4.2}$$

функції $f_i(x)$ і $g_i(x),\ i=1,2,\ldots,n$ будемо вважати неперервними у квадраті $a\le x,t\le b$ та лінійно-незалежними між собою.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма (4.1) із виродженим ядром (4.2)

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\int\limits_a^b g_i(t)\varphi(t)dt+f(x), \tag{6.4}$$

Розв′язоки φ інтегрального рівняння (4.3) будемо шукати в класі $C[a,b]$. Покажемо, що це рівняння зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь і тому їх можна досліджувати методами лінійної алгебри.

Рівняння (4.3) запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) + f(x), \tag{4.4}$$

де

$$c_i = \int_a^b g_i(t)\varphi(t)dt = (\varphi, \overline{g}_i) \tag{4.5}$$

– невідомі числа. Помножимо рівність (4.4) на $g_k(x)$ та проінтегруємо на $[a,b]$. Враховуючи (4.5), одержимо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення чисел c_k:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b g_k(x) f_i(x)dx + \int_a^b g_k(x) f(x)dx. \tag{4.6}$$

Позначимо

$$\int_a^b g_k(x) f_i(x)dx = \alpha_{ki}, \quad \int_a^b g_k(x) f(x)dx = a_k. \tag{4.7}$$

Тоді система (4.6) має вигляд

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Нехай $A = (\alpha_{ki}), \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Систему (4.8) запишемо в матричній формі $c = \lambda A c + a$.

Покажемо, що інтегральне рівняння (4.3) і алгебраїчні рівняння (4.8) еквівалентні. Дійсно, якщо $\varphi \in C[a,b]$ – розв′язок рівняння (4.4), то числа $c_i = (\varphi, \overline{g}_i) \quad i = 1,2,\ldots,n$ задовольняють систему (4.8).

Якщо числа $c_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$ відповідають системі (4.6), то функція $\varphi(x)$, що побудована за формулою (4.4), неперервна на $[a,b]$ і на підставі (4.7) задовольняє рівняння (4.3):

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \int_a^b g_i(t)\varphi(t)dt - f(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \left(c_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_k \alpha_{ik} - a_i \right) = 0.$$

Нехай $D(\lambda)$ – визначник системи (4.8),

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \tag{4.9}$$

$M_{ki}(\lambda)$ – алгебраїчні доповнення матриці $I - \lambda A$. Неважко бачити, що $D(\lambda)$ і $M_{ki}(\lambda)$ – поліноми за λ. Припустимо, що число λ таке, що $D(\lambda) \neq 0$. За теоремою Крамера розв′язок алгебраїчної системи (4.8) єдиний і визначається формулою

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} M_{ki}(\lambda) a_i \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{4.10}$$

Підставимо розв′язок (4.10) у (4.4) і з урахуванням (4.7), одержимо розв′язок інтегрального рівняння (4.3) при $D(\lambda) \neq 0$ у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{n} M_{ki}(\lambda) f_i(x) \int_a^b g_k(t) f(t)dt + f(x). \tag{6.14}$$

З іншого боку, при достатньо малих λ ($D(\lambda) \neq 0$) цей розв′язок визначається за допомогою резольвенти $R(x,t;\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k(x,t)$.

Отже

$$R(x,t,\lambda) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{n} M_{ki}(\lambda) f_i(x) g_k(t). \tag{4.12}$$

Таким чином, резольвента $R(x,t;\lambda)$ виродженого ядра є раціональною функцією.

Приклади розв'язування рівнянь

Приклад 1. Розв′язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\varphi(t)dt + \cos x. \tag{4.13}$$

Розв′язання. Запишемо рівняння в наступному вигляді

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t)dt - \lambda \cos x \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t)dt + \cos x.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t)dt, \quad c_2 = \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t)dt, \tag{4.14}$$

де c_1, c_2 – невідомі сталі. Тоді (4.13) набуває вигляду

$$\varphi(x) = \lambda c_1 \sin x - \lambda c_2 \cos x + \cos x. \tag{4.15}$$

Підставимо (4.15) в (4.14), дістанемо

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t(\lambda c_1 \sin t - \lambda c_2 \cos t + \cos t)dt,$$

$$c_2 = \int_0^{\pi} \sin t(\lambda c_1 \sin t - \lambda c_2 \cos t + \cos t)dt,$$

$$c_1(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos t \sin t\, dt) + \lambda c_2 \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt,$$

чи

$$-\lambda c_1 \int_0^{\pi} \sin^2 t + c_2(1 + \lambda \int_0^{\pi} \cos t \sin t\, dt) = \int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt.$$

Обчислимо інтеграли, які входять в ці рівняння й одержимо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\pi\lambda}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi\lambda}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Визначник цієї системи: $D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi\lambda}{2} \\ -\frac{\pi\lambda}{2} & 1 \end{vmatrix}=1+\frac{\pi^2\lambda^2}{4}\neq 0$.

Система (4.16) має єдиний розв′язок, який знаходимо за правилом Крамера. Маємо

$$c_1=\frac{2\pi}{4+\pi^2\lambda^2},\quad c_2=\frac{2\pi}{4+\pi^2\lambda^2}. \tag{4.17}$$

Підставимо (4.17) в (4.15) й одержимо розв′язок даного інтегрального рівняння:

$$\varphi(x)=2\frac{\pi\lambda\sin x+2\cos x}{4+\pi^2\lambda^2}.$$

Приклад 2. Розв′язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(2xt^3+5x^2t^2)\varphi(x)dt+7x^4+3. \tag{4.18}$$

Розв′язання. Рівняння (4.18) запишемо у вигляді

$$\varphi(x)=2\lambda x\int_{-1}^{1}t^3\varphi(x)dt+5\lambda x^2\int_{-1}^{1}t^2\varphi(x)dt+7x^4+3$$

чи

$$\varphi(x)=2\lambda c_1x+5\lambda c_2x^2+7x^4+3, \tag{4.19}$$

де

$$c_1=\int_{-1}^{1}t^3\varphi(x)dt,\quad c_2=\int_{-1}^{1}t^2\varphi(x)dt. \tag{4.20}$$

На підставі (4.19) рівняння (4.20) набувають вигляду

$$c_1=\int_{-1}^{1}t^3(2\lambda c_1t+5\lambda c_2t^2+7t^4+3)dt,$$

$$c_2=\int_{-1}^{1}t^2(2\lambda c_1t+5\lambda c_2t^2+7t^4+3)dt.$$

Вони еквівалентні наступним рівнянням

$$c_1\left(1-2\lambda\int_{-1}^{1}t^4dt\right)-5\lambda c_2\int_{-1}^{1}t^5dt=\int_{-1}^{1}(7t^7+3t^3)dt,$$

$$-2\lambda c_1\int_{-1}^{1}t^3dt+c_2\left(1-5\lambda\int_{-1}^{1}t^4dt\right)=\int_{-1}^{1}(7t^6+3t^2)dt.$$

Звідси отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1\left(1-\frac{4}{5}\lambda\right)=0, \\ c_2(1-2\lambda)=4. \end{cases} \tag{4.21}$$

Визначник цієї системи: $D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{4}{5}\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix}=\left(1-\frac{4}{5}\lambda\right)(1-2\lambda)$.

Система (4.21) має єдиний розв′язок коли $D(\lambda)\neq 0$, тобто $\lambda\neq\frac{5}{4}$, $\lambda\neq\frac{1}{2}$. Тоді

$$c_1=0,\quad c_2=\frac{4}{1-2\lambda}. \tag{4.22}$$

Підставимо (4.22) у (4.19) і одержимо розв′язок інтегрального рівняння (4.18): $\varphi(x)=\frac{2\lambda}{1-2\lambda}x^2+7x^4+3$.

Якщо $\lambda=\frac{1}{2}$, то з (4.21) випливає, що розв′язків взагалі не існує.

Якщо $\lambda=\frac{5}{4}$, то враховуючи (4.21) знайдемо: c_1 – довільна стала, $c_2=-\frac{8}{3}$. А шукана функція $\varphi(x)$ має вигляд $\varphi(x)=xc-\frac{50}{3}x^2+7x^4+3,\quad \forall c$.

Приклад 3. ***Розв′язати інтегральне рівняння***

$$\varphi(x)=\int_0^1 (x+t^3)\varphi(t)dt+2+x.$$

Розв'язання. Це рівняння з виродженим ядром і $\lambda=1$. Отже

$$\varphi(x)=xc_1+c_2+2+x,$$

де $c_1=\int_0^1\varphi(t)dt,\quad c_2=\int_0^1 t^3\varphi(t)dt$ – невідомі сталі. Для них маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$c_1=c_1\int_0^1 tdt+c_2\int_0^1 dt+\int_0^1(2+t)dt=\frac{3}{2}+\frac{c_1}{2}+c_2,$$

$$c_2=c_1\int_0^1 t^4dt+c_2\int_0^1 t^3dt+\int_0^1 t^3(2+t)dt=\frac{7}{10}+\frac{c_1}{5}+\frac{c_2}{4}.$$

Розв'язавши її, дістанемо $c_1=11,\quad c_2=\frac{16}{7}$, а тому $\varphi(x)=40\frac{(1+2x)}{7}$.

Приклад 4. ***Розв′язати інтегральне рівняння***

$$\varphi(x)=3\int_0^1 xt\varphi(t)dt+1-\frac{3}{2}x. \tag{4.23}$$

Розв'язання. Маємо $\lambda=3$, ядро $K(x,t)=xt$ – вироджене, а тому

$$\varphi(x)=3cx+1-\frac{3}{2}x,$$

де $c=\int_0^1 t\varphi(t)dt$ – невідома стала. Для неї маємо рівняння

$$c=3c\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1\left(1-\frac{3}{2}\right)tdt=c.$$

Як бачимо, це рівняння має безліч розв'язків, отже інтегральне рівняння (4.23) таж має безліч розв'язків $\varphi(x)=cx+1-\frac{3}{2}x$.

Приклад 5. ***Розв'язати інтегральне рівняння***

$$\varphi(x)=5\int_0^1 x^2t^2\varphi(t)dt+1.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вироджене ядром: $K(x,t)=x^2t^2$, $\lambda=5$.

Отже $\varphi(x)=5x^2c+1$, де $c=\int_0^1 t^2\varphi(t)dt$ – невідома стала. Для неї маємо рівняння

$c=5c\int_0^1 t^4\,dt+\int_0^1 t^2\,dt=c+\frac{1}{3}$. Оскільки це рівняння не сумісне, а отже не має розв'язків, то і розглянуте інтегральне рівняння не має розв'язків.

Контрольні запитання

1. Яке ядро називається виродженим?
2. До системи яких рівнянь зводиться неоднорідне рівняння Фредгольма з виродженим ядром?
3. Як визначається резольвента виродженого ядра через матрицю A алгебраїчного рівняння?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Чи являються наступні рівняння – рівняннями з виродженим ядром?

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^2\sin(2t-4x)\varphi(t)dt+1e^x,\ \varphi(x)=5\int_0^1\sqrt{x^2+t^2}\,\varphi(t)dt+x^2.$$

2. Розв'язати наступні рівняння:

1) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1 2e^{x+t}\varphi(t)dt+e^x$;

2) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x^2-xt)\varphi(t)dt+x^2+x$;

3) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1\sin(3x+t)\varphi(t)dt+\cos x$;

4) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1\cos^2(x-t)\varphi(t)dt+1+\cos 4x$.

1.5. Характеристичні числа і власні функції ядра інтегрального рівняння

Розглянемо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = \lambda \mathbf{K}\varphi \qquad (5.1)$$

Воно, очевидно, має тривіальний розв′язок $\varphi(x) \equiv 0$, який називають нульовим розв′язком. Але, як і в алгебраїчній спектральній задачі $x = \lambda A x \quad (x = (x_1,\ldots,x_n)^{\Gamma}, \quad A = (\alpha_{ij}), \quad \lambda = \text{const}$, задача полягає в побудові нетривіальних розв′язків $(\varphi(x) \not\equiv 0)$ рівняння (5.1) та відповідних цим розв′язкам значень λ_k параметра λ.

Значення параметра λ, при яких рівняння (5.1) має ненульові розв′язки $\varphi(x) \not\equiv 0$, називаються характеристичними числами рівняння (5.1) чи ядра $K(x,t)$, а кожний ненульовий розв′язок цього рівняння називається власною функцією, що відповідає характеристичному числу λ.

Зауважимо, що характеристичні числа υ_j *n*-го ітерованого ядра $K_n(x,t)$ якщо вони існують, є числа λ_j^n, де λ_j – характеристичні числа ядра $K(x,t)$, а власні функції цих ядер одні й тіж (із точністю до сталого множника). Дійсно, якщо λ_j, $\varphi_j(x)$ – відповідно характеристичні числа та відповідні їм власні функції ядра $K(x,t)$, то маємо тотожність $\varphi_j(x) = \lambda_j \mathbf{K}\varphi_j$, а тому справджуються і наступні рівності

$$\varphi_j(x) = \lambda_j \mathbf{K}\varphi_j = \lambda_j^2 \mathbf{K}^2 \varphi_j = \ldots = \lambda_j^n \mathbf{K}^n \varphi_j = \lambda_j^n \int_a^b K_n(x,t)\varphi(t)dt,$$

що й доводить це твердження.

Якщо ядро $K(x,t)$ неперервне у квадраті $D\{a \le x \le b,\ a \le t < b\}$ чи квадратично-сумовне в *D*, при цьому числа *a* і *b* скінченні, то кожному характеристичному числу λ відповідає скінченне число лінійно-незалежних власних функцій. Число таких функцій називається рангом характеристичного числа. Різні характеристичні числа можуть мати різні ранги.

Для рівняння (5.1) із виродженим ядром $K(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_n(x) b_k(t)$ характеристичні числа є коренями алгебраїчного рівняння

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & -\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & -\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0, \qquad (5.2)$$

де $a_{km}=\int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$, степінь якого $p\le n$. Тут $D(\lambda)$ – визначник однорідної лінійної системи

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})c_1-\lambda a_{12}c_2-\ldots-\lambda a_{1n}c_n=0 \\ -\lambda a_{21}c_1+(1-\lambda a_{22})c_2-\ldots-\lambda a_{2n}c_n=0 \\ \dots \\ -\lambda a_{n1}c_1-\lambda a_{n2}c_2-\ldots+(1-\lambda a_{nn})c_n=0, \end{cases} \qquad (5.3)$$

$$c_m=\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt, \quad m=\overline{1,n}.$$

Якщо рівняння (5.2) має *p* коренів $(1\le p\le n)$, то інтегральне рівняння (5.1) із виродженим ядром має *p* характеристичних чисел. Кожному характеристичному числу $\lambda_m, \quad m=\overline{1,p}$, відповідає ненульовий розв′язок системи (5.3).

Інтегральне рівняння з виродженим ядром має не більш ніж *n* характеристичних чисел та відповідних їм власних функцій.

Однорідне інтегральне рівняння Фредгольма може взагалі не мати характеристичних чисел і власних функцій, чи може не мати дійсних характеристичних чисел і власних функцій.

У випадку довільного (не виродженого) ядра характеристичні числа є нулями визначника Фредгольма, тобто полюсами резольвенти $R=(x,t;\lambda)$. Звідси випливає, що інтегральне рівняння Вольтерра $\varphi(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$, де $K(x,t)\in L_2$, не має характеристичних чисел.

Власні функції визначаються з точністю до сталого множника: якщо $\varphi(x)$ – власна функція, що відповідає деякому характеристичному числу λ, то і $c\varphi(x)$, де *c* –довільна стала, також є власною функцією, яка відповідає тому ж характеристичному числу λ.

Ядро $K(x,t)$ інтегрального рівняння називається симетричним, якщо виконується умова $K(x,t)=K(t,x) \quad (a\le x,\ t\le b)$.

Для інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad (5.4)$$

із симетричним ядром мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Рівняння (5.4) має хоча б одно дійсне характеристичне число.

Теорема 2. Кожному характеристичному числу відповідає скінченне число q лінійно незалежних власних функцій рівняння (5.4), при цьому $q \le \lambda^2 B^2$, де $B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$.

Теорема 3. Кожна пара власних функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, які відповідають різним характеристичним числам $\lambda_1 \ne \lambda_2$, є ортогональною, тобто $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$.

Теорема 4. В кожному скінченному інтервалі вісі λ знаходиться скінченне число характеристичних чисел. Число m характеристичних чисел, що належать проміжку $(-l,l)$ визначається нерівністю $m \le l^2 B^2$.

Якщо ядро $K(x,t)$ інтегрального рівняння (5.4) є функцією Гріна деякої однорідної задачі Штурма-Ліувілля, то знаходження характеристичних чисел і власних функцій зводиться до розв′язання задачі Штурма-Ліувілля. Покажемо це нижче (див. приклади розв’язування задач).

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Відомо, що при деякій швидкості обертання вала, яка називається критичною, вал починає коливатися навколо своєї повздовжньої вісі.Для визначення критичної швидкості вала використовують наступний факт із теорії пружних балок: для довільної пружної балки при довільних умовах на її кінцях завжди існує функція впливу $G(x,\xi)$, що описує відхилення балки в даному напрямку, наприклад, в напрямку вісі Oy, в довільній точці $M(x)$ балки, яке з’явилось під дією одиничного навантаження, що прикладенео в точці $N(\xi)$ балки і діє в обраному напрямку.

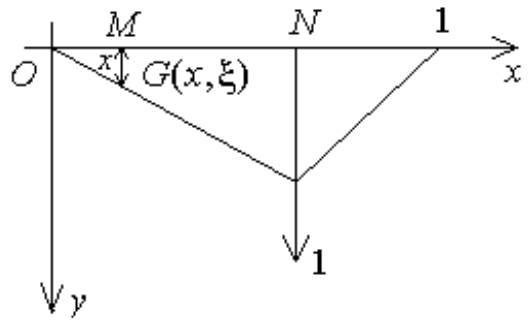


рис. 3

На підставі принципу Бетті-Масквела в теорії пружності функція впливу $G(x,\xi)$ є симетричною, тобто $G(x,\xi) = G(x,t)$.

Нехай $p(x)$ – неперервне розподілення навантаження вздовж балки. Тоді навантаження між x та $x + dx$ дорівнює $p(x)dx$. З принципу суперпозиції в теорії пружності випливає, що відхилення вісі балки від положення рівноваги описується наступним чином:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)p(\xi)d\xi \quad (0 \le x \le 1).$$

У випадку, коли вал обертається навколо вісі Ox з кутовою швидкістю ω та лінійною щільністю $\mu(x)$ розподілення навантаження має вигляд

$$p(x)=\omega^2\mu(x)y(x),$$

де $y(x)$ – відхилення центра тяжіння перерізу, що відповідає координаті x.

Підставимо вираз для $p(x)$ в одержане рівняння. Маємо

$$y(x)=\omega^2\int_0^1 G(x,\xi)\mu(\xi)y(\xi)d\xi \quad (0\le x\le 1).$$

Позначимо $\omega^2=\lambda$, тоді $y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\mu(\xi)y(\xi)d\xi \quad (0\le x\le 1)$.

Таким чином, задача про знаходження критичної швидкості вала, який обертається, звелась до знаходження значень λ, при яких останнє рівняння має ненульовий розв′язок.

Приклад 2. Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt=0. \tag{5.5}$$

Розв′язання. Ядро рівняння (5.5) запишемо у вигляді

$$K(x,t)=\cos(x+t)=\cos x\cos t-\sin x\sin t.$$

Тоді (5.5) набуває вигляду

$$\varphi(x)=\lambda\cos x\int_0^\pi \cos t\varphi(t)dt-\lambda\sin x\int_0^\pi \sin t\varphi(t)dt. \tag{5.6}$$

Введемо позначення

$$c_1=\int_0^\pi \cos t\varphi(t)dt,\quad c_2=\int_0^\pi \sin t\varphi(t)dt. \tag{5.7}$$

З урахуванням (5.7), рівняння (5.6) запишемо наступним чином

$$\varphi(x)=\lambda c_1\cos x-\lambda c_2\sin x. \tag{5.8}$$

Підставимо (5.8) у (5.7). Дістанемо $\begin{cases} c_1=\int_0^\pi \cos t(\lambda c_1\cos t-\lambda c_2\sin t)dt \\ c_2=\int_0^\pi \sin t(\lambda c_1\cos t-\lambda c_2\sin t)dt, \end{cases}$

чи

$$\begin{cases} c_1\left(1-\lambda\int_0^\pi \cos^2 t\,dt\right)+\lambda c_2\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt=0 \\ -c_1\lambda\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt+c_2\left(1+\lambda\int_0^\pi \sin^2 t\,dt\right)=0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Одержали систему лінійних однорідних рівнянь (5.9). Оскільки $\int_0^\pi \cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^\pi \cos t\sin t dt=0$, $\int_0^\pi \sin^2 t dt=\frac{\pi}{2}$, то система (5.9) набуває вигляду

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)c_1=0\\ \left(1+\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)c_2=0.\end{cases} \tag{5.10}$$

Рівняння для знаходження характеристичних чисел: $\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda\pi}{2} & 0\\ 0 & 1+\dfrac{\lambda\pi}{2}\end{vmatrix}=0$. Звідси дістанемо характеристичні числа: $\lambda_1=\dfrac{2}{\pi},\quad \lambda_2=-\dfrac{2}{\pi}$.

Коли $\lambda=\lambda_1=\dfrac{2}{\pi}$ – система запишеться таким чином: $\begin{cases}0\cdot c_1=0\\ 2c_2=0.\end{cases}$

Звідси $c_2=0$, c_1 – довільна стала. Підставимо c_1, c_2 в (5.8) і одержимо власну функцію $\varphi_1(x)=\dfrac{2}{\pi}c_1\cos x$. Оскільки власна функція визначається з точністю до сталої, то $\varphi_1(x)=\cos x$.

При $\lambda=\lambda_2=-\dfrac{2}{\pi}$ (5.10) набуває вигляду $\begin{cases}2\cdot c_1=0\\ 0\cdot c_2=0.\end{cases}$

Отже $c_1=0$, c_2 – довільна стала. Власна функція має вигляд: $\varphi_2(x)=\sin x$, що відповідає власному значенню $\lambda_2=-\dfrac{2}{\pi}$.

Приклад 3. Знайти характеристичні числа і власні функції рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1\left(\left[\frac{x}{t}\right]^{\frac{2}{5}}+\left[\frac{t}{x}\right]^{\frac{2}{5}}\right)\varphi(t)dt\,. \tag{5.11}$$

Розв'язання. Маємо

$$\varphi(x)=\lambda x^{\frac{2}{5}}\int_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\varphi(t)dt+\lambda x^{-\frac{2}{5}}\int_0^1 t^{\frac{2}{5}}\varphi(t)dt\,. \tag{5.12}$$

Позначимо

$$c_1=\int_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\varphi(t)dt,\quad c_2=\int_0^1 t^{\frac{2}{5}}\varphi(t)dt\,. \tag{5.13}$$

Тоді (5.12) має вигляд

$$\varphi(x)=\lambda c_1x^{\frac{2}{5}}+\lambda c_2x^{-\frac{2}{5}}. \tag{5.14}$$

Підставимо (5.14) в (5.13): $\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\left(\lambda c_1 t^{\frac{2}{5}} + \lambda c_2 t^{-\frac{2}{5}}\right)dt \\ c_2 = \int\limits_0^1 t^{\frac{2}{5}}\left(\lambda c_1 t^{\frac{2}{5}} + \lambda c_2 t^{-\frac{2}{5}}\right)dt, \end{cases}$

чи $\begin{cases} c_1\left(1 - \lambda c_1 \int\limits_0^1 dt\right) + \lambda c_2 \int\limits_0^1 t^{-\frac{4}{5}} dt = 0 \\ -\lambda c_1 t^{\frac{4}{5}} dt + c_2\left(1 - \lambda c_2 \int\limits_0^1 dt\right) = 0. \end{cases}$

Отримали систему однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0 \\ -\frac{5}{9}\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Знайдемо характеристичні числа

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\frac{5}{9}\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25}{9}\lambda^2 = \left(1 - \frac{8}{3}\lambda\right)\left(1 + \frac{2}{3}\lambda\right) = 0.$$

Отже, характеристичні числа $\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

Коли $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{8}$ із системи (5.15) одержимо $c_1 = 3c_2$. Тоді власна функція $\varphi_1(x) = 3x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{2}{5}}$.

Якщо $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$, то $c_1 = -3c_2$, $\varphi_2(x) = -3x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{2}{5}}$.

Приклад 4. Однорідне інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x\mathrm{ch}t - t\mathrm{ch}x)\varphi(t)dt = 0. \tag{5.16}$$

не має характеристичних чисел і власних функцій.

Дійсно, маємо $\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{ch}t dt - \lambda \mathrm{ch}x \int\limits_{-1}^{1} t\varphi(t)dt$. Покладемо

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{ch}t\varphi(t)dt, \quad c_2 = \int\limits_{-1}^{1} t\varphi(t)dt. \tag{5.17}$$

Тоді

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x - \lambda c_2 \mathrm{ch}x. \tag{5.18}$$

Використовуючи (5.17), (5.18) запишемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{ch}t(\lambda c_1 t - \lambda c_2 \mathrm{ch}t)dt \\ c_2 = \int\limits_{-1}^{1} t(\lambda c_1 t - \lambda c_2 \mathrm{ch}t)dt, \end{cases} \tag{5.19}$$

Оскільки $\int\limits_{-1}^{1} t\mathrm{ch}t dt = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{ch}^2 t dt = 1$. Система (5.19) набуваю вигляду

$$\begin{cases} c_1 = -\lambda c_2 \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Отже $c_1 = c_2 = 0$ і $\varphi(x) \equiv 0$.

Однорідне інтегральне рівняння (5.16) при будь-яких λ має тільки один нульовий розв′язок $\varphi(x) \equiv 0$, а отже, воно не має характеристичних чисел і власних функцій.

Приклад 5. Рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}t - \sqrt{t}x\right)\varphi(t)dt = 0. \tag{5.20}$$

не має дійсних характеристичних чисел і власних функцій.

Дійсно, маємо

$$\varphi(x) = c_1 \lambda \sqrt{x} - c_2 \lambda x, \tag{5.21}$$

де

$$c_1 = \int\limits_0^1 t\varphi(t)dt, \quad c_2 = \int\limits_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt. \tag{5.22}$$

Підставимо (5.21) в (5.22): $\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 t(c_1 \lambda \sqrt{t} - c_2 \lambda t)dt \\ c_2 = \int\limits_0^1 \sqrt{t}(c_1 \lambda \sqrt{t} - c_2 \lambda t)dt, \end{cases}$

чи

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right)c_2 = 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Визначник цієї системи дорівнює $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}$.

При дійсних λ він нулю не дорівнює. отже, з системи (5.23) дістанемо $c_1 = c_2 = 0$, тобто для всіх дійсних λ дане рівняння має тільки один розв′язок:

$\varphi(x) \equiv 0$. Інтегральне рівняння (5.20) не має дійсних характеристичних чисел і власних функцій.

Приклад 6. Знайти характеристичні числа і власні функції однорідного рівняння

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = 0, \text{ де } K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t \\ \sin t \cos x, & t \le x \le \pi \end{cases}.$$

Розв'язання. Дані рівняння запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x} K(x,t)\varphi(t)dt + \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt$$

чи

$$\varphi(x) = \lambda \cos x \int_0^{x} \sin t\, \varphi(t)dt + \lambda \sin x \int_x^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt. \qquad (5.25)$$

Продиференцюємо обидві частини (5.25). Дістанемо

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \sin x\, \varphi(x) - \lambda \sin x \int_0^{x} \sin t\ \varphi(t)dt -$$

$$- \lambda \sin x \cos x\, \varphi(x) + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt,$$

чи

$$\varphi'(x) = -\lambda \sin x \int_0^{x} \sin t\ \varphi(t)dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt. \qquad (5.26)$$

Ще раз продиференціюємо

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin^2 x\, \varphi(x) - \lambda \cos x \int_0^{x} \sin t\ \varphi(t)dt - \lambda \cos^2 x\, \varphi(x) - \lambda \sin x \int_x^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt =$$

$$= -\lambda\, \varphi(x) - \left[\lambda \cos x \int_0^{x} \sin t\ \varphi(t)dt + \lambda \sin x \int_x^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt \right] =$$

$$= -\lambda\, \varphi(x) - \varphi(x) = -(\lambda + 1)\varphi(x).$$

З рівності (5.25), (5.26) одержимо $\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0$.

Таким чином інтегральне рівняння звели до наступної крайової задачі

$$\varphi''(x) + (\lambda + 1)\varphi(x) = 0, \qquad (5.27)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0. \qquad (5.28)$$

Розв'яжемо її. Можливі три випадки.

1) $(\lambda + 1) = 0$, чи $\lambda = -1$. Рівняння (5.27) набуває вигляду $\varphi''(x) = 0$. Його загальним розв'язком є функція $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. Використаємо крайові умови (5.28) для визначення сталих c_1, c_2. Маємо $\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$, отже задача (5.27), (5.28) і відповідно інтегральне рівняння мають тільки тривіальний розв'язок $\varphi(x) \equiv 0$.

2) $(\lambda+1)<0$, чи $\lambda<-1$. Інтегруючи рівняння (5.27), знайдемо

$$\varphi(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda-1}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda-1}x},$$

звідки $\varphi'(x)=\sqrt{-\lambda-1}\left(c_1e^{\sqrt{-\lambda-1}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda-1}x}\right)$.

Для знаходження c_1 і c_2 крайові умови дають систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ \sqrt{-\lambda-1}\left(c_1e^{\sqrt{-\lambda-1}\pi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda-1}\pi}\right)=0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв′язок $c_1=c_2=0$. Звідси випливає, що інтегральне рівняння має тривіальний розв′язок $\varphi(x)\equiv 0$. Отже коли $\lambda<-1$ інтегральне рівняння не має характеристичних чисел і власних функцій.

3) $(\lambda+1)>0$, чи $\lambda>-1$. Загальний розв′язок рівняння (5.27) має вигляд

$$\varphi(x)=c_1\cos\sqrt{-\lambda-1}x+c_2\sin\sqrt{\lambda+1}x.$$

З цієї рівності знаходимо, що $\varphi'(x)=\sqrt{\lambda+1}\left(-c_1\sin\sqrt{\lambda+1}x+c_2\cos\sqrt{\lambda+1}x\right)$.
Використовуючи крайові умови (5.28) дістанемо

$$\begin{cases} c_1=0 \\ \sqrt{\lambda+1}\left(-c_1\sin\sqrt{\lambda+1}\pi+c_2\cos\sqrt{\lambda+1}\pi\right)=0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Визначник цієї системи $D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\lambda+1}\sin\sqrt{\lambda+1}\pi & \sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\pi \end{vmatrix}$.

Покладемо $D(\lambda)=0$. Отримаємо рівняння для знаходження характеристичних чисел

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\lambda+1}\sin\sqrt{\lambda+1}\pi & \sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\pi \end{vmatrix}=0, \tag{5.30}$$

чи $\sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\pi=0$. За припущенням $\sqrt{\lambda+1}\neq 0$, тому $\cos\sqrt{\lambda+1}\pi=0$. Звідси маємо $\pi\sqrt{\lambda+1}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$. Усі корені рівняння (5.30) визначаються формулою $\lambda_k=\left(\dfrac{1+2k}{2}\right)-1$.

Коли $\lambda=\lambda_k$ система (5.29) набуває вигляду $\begin{cases} c_1=0 \\ \left(\dfrac{1+2k}{2}\right)^2 c_2\cdot 0=0 \end{cases}$. Вона має нескінченну множину розв′язків $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=c \end{cases}$, де c – довільна стала. Звідси випливає, що інтегральне рівняння має нескінченну множину розв′язків:

$$\varphi_k(x)=c\cos\left(\frac{1+2k}{2}\right)x,$$

які є власними функціями цього рівняння.

Отже, характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння (5.25) $\lambda_k = \left(\frac{1+2k}{2}\right) - 1, \;\; \varphi_k(x) = \cos\left(\frac{1+2k}{2}\right)x, \quad k \in Z$.

Приклад 7. Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння з ядром $K(x,t) = \begin{cases} \sin x \sin(1-t), & 0 \le x \le t \\ \sin(1-x)\sin t, & t \le x \le 1 \end{cases}$.

Розв'язання. Інтегральне рівняння має вигляд

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \lambda \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt$$

чи

$$\varphi(x) = \lambda \sin(1-x) \int_0^x \sin t\, \varphi(t)dt + \lambda \sin x \int_x^1 \sin(1-t)\varphi(t)dt. \qquad (5.31)$$

Продиференціюємо рівняння (5.31):

$$\varphi'(x) = \lambda \sin(1-x)\sin x\, \varphi(x) - \lambda \cos(1-x) \int_0^x \sin t\, \varphi(t)dt -$$

$$- \lambda \sin x \sin(1-x)\, \varphi(x) + \lambda \cos x \int_x^1 \sin(1-t)\varphi(t)dt.$$

чи

$$\varphi'(x) = -\lambda \cos(1-x) \int_0^x \sin t\, \varphi(t)dt + \lambda \cos x \int_x^1 \sin(1-t)\varphi(t)dt. \qquad (5.32)$$

Ще раз диференцюємо. Дістанемо

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin(1-x) \int_0^x \sin t\, \varphi(t)dt - \lambda \cos(1-x)\sin x\, \varphi(x) - \lambda \sin x \int_x^1 \sin(1-t)\varphi(t)dt -$$

$$- \lambda \cos x \sin(1-x)\varphi(x) = -\left[\lambda \sin(1-x) \int_0^x \sin t\, \varphi(t)dt + \lambda \sin x \int_x^1 \sin(1-t)\varphi(t)dt\right] -$$

$$- \lambda\left[\cos(1-x)\sin x + \cos x \sin(1-x)\right]\varphi(x) = -\varphi(x) - \lambda \sin 1\, \varphi(x),$$

$$\varphi''(x) = -(1 + \lambda \sin 1)\, \varphi(x).$$

На підставі (5.31) отримаємо $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0$. Таким чином інтегральне рівняння (5.31) зводиться до наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \varphi''(x) + (1 + \lambda \sin 1)\, \varphi(x) = 0 & (5.33) \\ \lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = 0. & (5.34) \end{cases}$$

Розглянемо наступні випадки.

1) $1 + \lambda \sin 1 = 0$. Рівняння (5.33) запишеться у вигляді $\varphi''(x) = 0$. Інтегруючи останнє, дістанемо $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. Використаємо крайові умови (5.34) для

визначення сталих c_1, c_2 і одержимо $\begin{cases}\varphi(0)=c_2=0\\ \varphi(1)=c_1=0\end{cases}$. Отже $\varphi(x)\equiv 0$, а значить і інтегральне рівняння має тільки тривіальний розв′язок.

2) Нехай $1+\lambda\sin 1<0$. Загальний розв′язок (5.31) має вигляд

$$\varphi(x)=c_1e^{\sqrt{-(1+\lambda\sin 1)}x}+c_2e^{-\sqrt{-(1+\lambda\sin 1)}x}.$$

Сталі c_1 і c_2 знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases}\varphi(0)=c_1+c_2=0\\ \varphi(1)=c_1e^{\sqrt{-(1+\lambda\sin 1)}}+c_2e^{-\sqrt{-(1+\lambda\sin 1)}}=0.\end{cases}$$

Остання система має тільки тривіальний розв′язок $c_1=0,\quad c_2=0$. Отже в цьому випадку розв′язок інтегрального рівняння $\varphi(x)\equiv 0$. Отримали, що при $1+\lambda\sin 1\le 0$ інтегральне рівняння не має характеристичних чисел і власних функцій.

3) Розглянемо випадки коли $1+\lambda\sin 1>0$. Інтегруючи (5.33) дістанемо

$$\varphi(x)=c_1\sin\sqrt{1+\lambda\sin 1}x+c_2\cos\sqrt{1+\lambda\sin 1}x.$$

З крайових умов (5.33) одержимо систему, для знаходження сталих c_1 і c_2.

$$\begin{cases}\varphi(0)=c_2=0\\ \varphi(x)=c_1\sin\sqrt{1+\lambda\sin 1}x+c_2\cos\sqrt{1+\lambda\sin 1}x=0.\end{cases}$$

Визначник цієї системи $D(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sin\sqrt{1+\lambda\sin 1} & \cos\sqrt{1+\lambda\sin 1}\end{vmatrix}$. Покладемо $D(\lambda)=0$ і отримаємо рівняння для знаходження характеристичних чисел. Маємо $\sin\sqrt{1+\lambda\sin 1}=0$. З останньої рівності дістанемо $\lambda_k=\dfrac{(\pi k)^2-1}{\sin 1},\quad k=1,2,\ldots$ – характеристичні числа, відповідні їм власні функції $\varphi_k(x)=\sin\pi kx,\quad k=1,2,\ldots$.

Контрольні запитання

1. Дайте означення характеристичних чисел і власних функцій.
2. Наведіть схему розв′язування спектральної інтегральної задачі для рівнянь із виродженим ядром.
3. Які властивості мають характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння із симетричним ядром?

Приклади для самостійного роз′язування

Приклад 1. Знайти характеристичні числа і власні функції наступних інтегральних рівнянь:

1) $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+t)\varphi(t)dt$; 2) $\varphi(t)=\lambda\int\limits_0^1(x^2+t^2)\varphi(t)dt$;

2) $\varphi(t)=\lambda\int\limits_{-1}^1(x\mathrm{ch}t-t\mathrm{ch}x)\varphi(t)dt$; 3) $\varphi(t)=\lambda\int\limits_0^1\left(x^2t^2-\dfrac{2}{45}\right)\varphi(t)dt$.

Приклад 2. Знайти характеристичні числа і власні функції однорідних інтегральних рівнянь із симетричними ядрами, якщо ці ядра мають наступний вигляд:

1) $K(x,t)=\begin{cases}(x+1)(t-2), & 0\le x\le t\\ (x+1)(t-2), & t\le x\le 1\end{cases}$;

2) $K(x,t)=\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right), & 0\le x\le t\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right), & t\le x\le 1\end{cases}$;

3) $K(x,t)=\begin{cases}(e^x-e^{-x})(e^t+e^{2-t}), & 0\le x\le t\\ (e^x+e^{2-x})(e^t-e^{-t}), & t\le x\le 1\end{cases}$.

1.6 Теореми Фредгольма

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром 2-го роду

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt+f(x) \tag{6.1}$$

і спряжене до нього

$$\psi(x)=\overline{\lambda}\int_a^b K^*(x,t)\psi(t)dt+z(x), \tag{6.2}$$

Рівняння (6.2) називають спряженим до рівняння (6.1), а ядро $K^*(x,t)=\overline{K(t,x)}$ - ермітово-спряженим (союзним) до ядра $K(x,t)$. Як було показано, інтегральні рівняння Фредгольма другого роду зводяться до систем лінійних алгебраїчних систем. Отже питання про існування та єдиність розв'язку інтегральних рівнянь зводиться до питання про існування та єдиність розв'язку згаданих алгебраїчних рівнянь.

Для рівняння (6.2) запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Маємо

$$\psi(x)=\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} d_i\overline{g_i}(x)+z(x). \tag{6.3}$$

де $d_i=\int_a^b \psi(x)d_i(x)dx$ – невідомі числа.

Тоді

$$d_k=\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}d_i+b_k,\quad k=\overline{1,n}, \tag{6.4}$$

$$\beta_{ki}=\int_a^b \overline{f_k}(x)\overline{g_i}(x)dx=\overline{\alpha_{ik}}. \tag{6.5}$$

В §4 для (4.1) була одержана така система рівнянь

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_i + a_k, \;\; k = \overline{1,n}, \tag{6.6}$$

де

$$\alpha_{ik} = \int_a^b g_k(x) f_i(x) dx, \;\; a_k = \int_a^b g_k(x) f(x) dx \tag{6.7}$$

Таким чином (6.4) є союзною до (6.6). Запишемо (6.4), (6.6) у матричній формі

$$c = \lambda A c + a, \tag{6.8}$$

$$d = \overline{\lambda} A^* d + b, \tag{6.9}$$

де $A^* = (\beta_{ki}) = (\overline{\alpha_{ik}}) = \overline{A}^T$, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Ранги матриці та її транспонованої співпадають, тому

$$\det(I - \overline{\lambda} A^*) = \det(I - \overline{\lambda}\, \overline{A}^T) = \overline{\det(I - \lambda A^T)} = \overline{D(\lambda)}, \tag{6.10}$$

$$rang(I - \overline{\lambda} A^*) = rang\overline{(I - \lambda A^T)} = rang(I - \lambda A) = q.$$

Можуть виникнути два випадки

1) Якщо $D(\lambda) \neq 0$. Тоді $q = n$ і системи (6.4) і (6.6) однозначно розв'язувані при будь-яких *a* і *b*. Отже, рівняння (6.1), (6.2) також однозначно розв'язувані при довільних *f* і *g*. Ці розв'язки визначаються формулами (6.3) і (6.7) відповідно.
2) Якщо $D(\lambda) = 0$. Тоді $q < n$ і, на підставі (6.9), однорідні системи

$$c = \lambda A c, \tag{6.10}$$

$$d = \overline{\lambda} A^* d, \tag{6.11}$$

мають по $n - q$ лінійно незалежних розв'язків

$$c^{(s)} = (c_1^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)}), \quad d^{(s)} = (d_1^{(s)}, \ldots, d_n^{(s)}), \quad s = \overline{1, n-q}.$$

Однорідні інтегральні рівняння, що відповідають рівнянням (6.1) і (6.2):

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt, \tag{6.12}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(x,t)} \psi(t) dt, \tag{6.13}$$

також будуть мати по $n - q$ лінійно незалежних розв'язків.

$$\varphi_s = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} d_i^{(s)} \overline{g_i}(x), \quad s = \overline{1, n-q}. \tag{6.14}$$

Для розв'язуваності системи (6.6) при $D(\lambda) = 0$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови ортогональності $(a, d^{(s)}) = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i^{(s)} = 0, \quad s = \overline{1, n-q}$.

Ці умови еквівалентні наступним: $(f, \psi_s) = \int_a^b f(x) \overline{\psi}(x) dx = 0, \quad s = \overline{1, n-q}$,

Оскільки $\int_a^b f(x)\overline{\psi}_s(x)dx = \lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f(x)g_i(x)dx\overline{d_i^{(s)}} = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{d_i^{(s)}} = \lambda(a, d^{(s)})$.

Таким чином, для інтегральних рівнянь з виродженим ядром мають місце теореми, які називаються теоремами Фредгольма.

Теорема 6.1. Якщо $D(\lambda) \neq 0$, то інтегральне рівняння (6.1) і спряжене до нього (6.2) мають розв'язки при довільних вільних членах $f(x)$ і $g(x)$.

Теорема 6.2. Якщо $D(\lambda) = 0$, то однорідні інтегральні рівняння (6.12) і (6.13) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків, яка дорівнює $n - q$, де q – ранг матриці $I - \lambda A$.

Теорема 6.3. Якщо $D(\lambda) = 0$, то для розв'язуваності рівняння (6.1) необхідно і достатньо, щоб вільний член був ортогональний до всіх розв'язків ψ_s, $s = \overline{1, n-q}$ союзного однорідного рівняння.

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром можна поширити на інтегральні рівняння з довільним неперервним ядром, оскільки неперервне ядро можна надати у вигляді суми виродженого ядра і достатньо малого неперервного ядра. Це дає можливість звести відповідне інтегральне рівняння до інтегрального рівняння з виродженим ядром. Звідси випливає, що теореми Фредгольма мають місце для інтегральних рівнянь з неперервним ядром. Сукупність цих теорем називається альтернативою Фредгольма.

Альтернатива Фредгольма.

I. Якщо інтегральне рівняння (6.1) з неперервним ядром розв'язувано в $C[a,b]$ при довільному вільному члені $f \in C[a,b]$, то і союзне до нього рівняння (6.2) розв'язувано в $C[a,b]$ при будь-якому вільному члені $g \in C[a,b]$, при цьому ці розв'язки єдині.

II. Якщо інтегральне рівняння (6.1) з неперервним ядром розв'язувано не при будь-якому вільному члені f, то

1) однорідні рівняння (6.12) і (6.13) мають однакове скінчене число лінійно незалежних розв'язків;
2) для розв'язуваності рівняння (6.1) необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним до всіх розв'язків союзного ортогонального рівняння (6.13):

$$\int_a^b f(x)\psi_s(x)dx = 0, \quad s = \overline{1, n-q}. \tag{6.14}$$

При виконанні останньої умови рівняння (6.1) буде мати нескінченну множину розв'язків, оскільки цьому рівнянню буде задовольняти будь-яка функція вигляду $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x)$ – розв'язок рівняння (6.1), а $\varphi_2(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння (6.12). Крім того, якщо $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$ задовольняють рівнянню (6.1), то їх різниця $\varphi_1(x) - \varphi_3(x)$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння (6.12).

Теореми Фредгольма мають важливе практичне значення. Замість того щоб доводити, що дане інтегральне рівняння (6.1) має розв'язок, часто буває легше

довести, що відповідне однорідне рівняння (6.12) чи спряжене до нього рівняння (6.13) мають тільки тривіальні розв'язки. Звідси, на підставі альтернативи, випливає, що рівняння (6.1) має розв'язок

Зауваження 1. Якщо функції $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ є розв'язками однорідного рівняння (6.12), то їх лінійна комбінація

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x),$$

де $C_k, k = \overline{1,n}$ – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.

Зауваження 2. Якщо ядро $K(x,t)$ інтегрального рівняння (6.1) симетрично, т.т. $K(x,t) \equiv K(t,x)$, то однорідне спряжене рівняння (6.13) співпадає з однорідним рівнянням (6.2).

Зауваження 3. У випадку неоднорідного інтегрального рівняння з виродженим ядром $\varphi(x) - \lambda\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(t)\right]\varphi(t)dt - f(x)$ з умови (6.14) ортогональності правої частини цього рівняння дістанемо *n* рівностей

$$\int_a^b f(t)b_k(t)dt = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. При яких значеннях параметрів α і β розв'язуване інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (x^2 - xt)\varphi(t)dt + \alpha x + \beta x^2. \qquad (6.15)$$

має розв'язки?

Розв'язання. Нехай λ є характеристичним числом. Ядро $K(x,t) = x^2 - xt$. Знайдемо його. Для цього розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (x^2 - xt)\varphi(t)dt. \qquad (6.16)$$

Розв′яжемо останнє, як рівняння з виродженим ядром. Дістанемо $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ – характеристичні числа даного ядра. Власні функції: $\varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x$. На підставі третьої теореми Фредгольма, для того щоб існував розв′язок необхідно, щоб права частина рівняння (6.15) $f(x) = \alpha x + \beta x^2$ була ортогональною до всіх розв′язків спріженого рівняння

$$\psi(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (t^2 - xt)\varphi(t)dt. \qquad (6.17)$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{2}$. В цьому випадку $\psi(x) = 1 - x$. Знайдемо умову існування розв′язку рівняння (6.15). Маємо $\int_{-1}^{1} (\alpha x + \beta x^2)(1 - x) = \frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\alpha = 0$, чи $\alpha = \beta$.

Якщо $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$, то рівняння (6.17) має розв′язок: $\psi(x) = x$ і умова існування розв′язку інтегрального рівняння (6.15) має вигляд $\int_{-1}^{1} (\alpha x + \beta x^2)dx = \frac{2}{3}\alpha = 0$. Звідси дістанемо $\alpha = 0$, β – довільна стала, а розв′язок (6.15) наступний $\varphi(x) = cx + \beta x^2$, де c – будь яка стала.

Якщо $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, то інтегральне рівняння (6.17) має розв′язок при довільних α і β.

Приклад 2. Знайти розв’язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t})\varphi(t)dt + ax^2 + bx + c$$

при всіх значеннях параметрів $\lambda,\ a,\ b,\ c$.

Розв′язання. Зведемо розв’язання інтегрального рівняння до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Маємо:

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt + \lambda\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{t}\varphi(t)dt + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення: $C_1 = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt,\ C_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{t}\varphi(t)dt$. Тоді шукана функція набуває вигляду $\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}C_1 + \lambda C_2 + ax^2 + bx + c$. Система рівнянь для визначення сталих наступна:

$$\begin{cases} C_1 - 2\lambda C_2 = \frac{2}{3}a + 2c \\ -\frac{6}{5}\lambda C_1 + C_2 = \frac{6}{7}b \end{cases}. \qquad (6.20)$$

Обчислимо визначник $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6}{5}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12}{5}\lambda^2$. Отже, якщо $D(\lambda) \neq 0$, т.т. $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, то система має єдиний розв’язок:

$$C_1 = \frac{5(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)},\ C_2 = \frac{28\lambda a + 30b + 35c}{7(5 - 12\lambda^2)},$$

а шуканий розв’язок інтегрального рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}\sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 30b + 35c}{7(5 - 12\lambda^2)}\lambda + ax^2 + bx + c,$$

де $a,\ b,\ c$ - довільні сталі.

Нехай $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Система (6.20) на підставі теореми Кронекера-Капеллі має розв'язок, якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці. Надалі помножимо друге рівняння на $-\sqrt{\frac{5}{3}}$:

$$\begin{cases} C_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}C_2 = \frac{2}{3}a + 2c \\ C_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}C_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b \end{cases}.$$

Ранг розширеної матриці буде дорівнювати одиниці, якщо прирівняємо праві частини. Звідси дістанемо умову $7(a+3c) = -3\sqrt{15}b$, за якою система має розв'язок, а отже і інтегральне рівняння: $\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_1(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{3}{5}})$, де C_1 - довільна стала.

Аналогічно, при $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ дістанемо умову, що накладається на параметри $7(a+3c) = 3\sqrt{15}b$, а шуканий розв'язок запишеться у вигляді $\varphi(x) = ax^2 + bx + c + C_2(\sqrt[3]{x} - \sqrt{\frac{3}{5}})$, де C_2 - довільна стала.

Приклад 3. Знайти всі значення параметра a, при яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (ax - t)\varphi(t)dt + f(x) \qquad (6.21)$$

має розв'язки для всіх дійсних λ та всіх неперервних $f(x)$, $x \in [0,1]$.

Розв'язання. Дане інтегральне рівняння буде мати розв'язки для всіх дійсних λ та всіх неперервних $f(x)$, $x \in [0,1]$ в тому і тільки в тому випадку, коли однорідне спряжене рівняння має тільки тривіальний розв'язок (не має дійсних характеристичних чисел). Розглянемо спряжене однорідне рівняння

$\psi(x) = \lambda\int_0^1 (at - x)\psi(t)dt$ чи $\psi(x) = \lambda(C_1 - xC_2)$, де $C_1 = \int_0^1 t\psi(t)dt$, $C_2 = \int_0^1 \psi(t)dt$.

Знайдемо характеристичні числа рівняння. Для цього запишемо систему

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{a\lambda}{2}C_1 - \dfrac{a\lambda}{3}C_2 \\ C_2 = \lambda C_1 - \dfrac{\lambda}{2}C_2 \end{cases}$$. Рівняння для визначення характеристичних чисел має вигляд: $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{a\lambda}{2} & \dfrac{a\lambda}{3} \\ -\lambda & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{a\lambda^2}{12} + \dfrac{1-a}{2}\lambda + 1$. Спряжене рівняння не буде мати дійсних характеристичних чисел, якщо $\dfrac{(1-a)^2}{4} - \dfrac{a}{3} < 0$. Звідси дістанемо, що $\dfrac{1}{3} < a < 3$. Отже, при виконанні цієї умови, інтегральне рівняння (6.21) має розв'язки для всіх λ та всіх неперервних $f(x)$, $x \in [0,1]$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. При яких значеннях параметра a інтегральне рівняння
$$\varphi(x) = \sqrt{15}\int_0^1 [t(4x^2 - 3x) + x(4t^2 - 3t)]\varphi(y)dy + ax + \frac{1}{x}$$
має розв'язок. Знайти цей розв'язок при цих значеннях a.
2. Знайти розв'язки наступних інтегральних рівнянь при всіх значеннях параметрів $\lambda,\ a,\ b,\ c$:

   1) $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(1 + xt)\varphi(t)dt + ax^2 + bx + c$;

   2) $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}\dfrac{1 + xt}{1 + t^2}\varphi(t)dt + a + x + bx^2$.

3. Знайти всі значення параметрів $a,\ b,\ c$ при яких наступні інтегральні рівняння мають розв'язки при будь-яких λ:

   1) $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(xt + x^2t^2)\varphi(t)dt + ax^2 + bx + c$;

   2) $\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(xt - \dfrac{1}{3})\varphi(t)dt + ax^2 - bx + 1$.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається спряженим?
2. Сформулюйте теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром.
3. Сформулюйте альтернативу Фредгольма.

1.7 Неоднорідні інтегральні рівняння із симетричним ядром

Має місце наступна теорема.

Теорема Гільберта-Шмідта. Якщо функція $f(x)$ може бути надана у вигляді $f(x)=\int_a^b K(x,t)h(t)dt$, де $h(t)$ – кусково-неперервна функція на $[a,b]$, то функція $f(x)$ зображується рядом Фур′є за власними функціями ядра $K(x,t)$, тобто $f(x)=\sum_{p=1}^{\infty} f_p\varphi_p(x)$, де $f_p=\frac{1}{\|\varphi_p\|}\int_a^b f(x)\varphi_p(x)dx$ і цей ряд абсолютно і рівномірно збігається на відрізку $[a,b]$.

Нехай в рівнянні

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt+f(x) \tag{7.1}$$

параметр λ не дорівнює ні одному з характеристичних чисел ядра $K(x,t)$. Тоді за першою теоремою Фредгольма це рівняння має єдиний розв′язок, який можна записати наступним чином:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda g(x), \tag{7.2}$$

де $g(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$.

За теоремою Гільберта-Шмідта функція $g(x)$ може бути розвинута в ряд Фур′є за власними функціями ядра $K(x,t)$:

$$g(x)=\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(x). \tag{7.3}$$

Підставимо в (7.1) замість функції $\varphi(x)$ її значення, яке визначається формулою (7.2), одержимо

$$f(x)+\lambda\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(x)\equiv f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\left\{f(t)+\lambda\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(t)\right\}dt,$$

чи

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(x)\equiv\int_a^b K(x,t)f(t)dt+\lambda\sum_{p=1}^{\infty} c_p\int_a^b K(x,t)\varphi_p(t)dt.$$

Застосуємо теорему Гільберта-Шмідта до функції $\int_a^b K(x,t)f(t)dt$ і враховуючи, що $\int_a^b K(x,t)f(t)dt=\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p}$, одержимо

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi_p(x)\equiv\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)+\lambda\sum_{p=1}^{\infty} c_p\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p},$$

звідси $c_p = \frac{f_p}{\lambda_p} + \frac{\lambda}{\lambda_p} c_p$ чи $c_p = \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}$. Таким чином, шуканий розв′язок рівняння (7.1) задається наступним рядом

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda} \varphi_p(x), \tag{7.4}$$

який абсолютно та рівномірно збігається.

Розглянемо випадок, коли λ дорівнює одному з характеристичних чисел λ_r, якому відповідають власні функції

$$\varphi_r(x), \quad \varphi_{r+1}(x), \ \ldots, \quad \varphi_{r+q}(x); \quad \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+q}.$$

Легко побачити (з формул для визначення коефіцієнтів c_p), повинні виконуватись рівності $f_r = f_{r+1} = \ldots = f_{r+q} = 0$, чи

$$\int_a^b f(x)\varphi_{r+s}(x)dx = 0, \quad s = \overline{0,q},$$

тобто функція $f(x)$ повинна бути ортогональною до всіх власних функцій ядра, які відповідають характеристичному числу λ_r. Прицьому коефіцієнти $c_r = c_{r+1} = \ldots = c_{r+q}$ – довільні і розв′язок рівняння (7.1) можна записати наступним чином

$$\varphi(x) = f(x) + c_r \varphi_r(x) + c_{r+1}\varphi_{r+1}(x) + \ldots + c_{r+q}\varphi_{r+q}(x) + \lambda_r \sum_p{}' c_p \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda_p} \varphi_p(x), \tag{7.5}$$

де $\sum'$ означає, що доданки сумуються за всіма значеннями p, крім $p = r, \quad r+1, \ldots, \ r+q$.

У випадку виродженого ядра $K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) b_k(t)$, у правих частинах формул (7.4) і (7.5) замість рядів будуть скінчені суми.

Якщо права частина рівняння (7.1), тобто функція $f(x)$ ортогональна до всіх власних функцій $\varphi_n(x)$ ядра $K(x,t)$, то розв′язком (7.1) буде сама функція $f(x) : \varphi_n(x) = f(x)$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Розв′язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xt + x^2 t^2)\varphi(t)dt + x^2 + x^4. \tag{7.6}$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ядра $K(x,t) = xt + x^2 t^2$. Маємо

$$\varphi_0(x) = \lambda x c_1 + \lambda x^2 c^2, \tag{7.7}$$

де

$$c_1 = \int_{-1}^{1} t\varphi(t)dt$$
$$c_2 = \int_{-1}^{1} t^2\varphi(t)dt. \qquad (7.8)$$

Підставимо (7.7) в (7.8), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих c_1, c_2. $\begin{cases} c_1 = \frac{2}{3}\lambda c_1 \\ c_2 = \frac{2}{5}\lambda c_2 \end{cases}$. Звідси дістанемо $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}$. Відповідні їм власні функції $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

Нехай параметр λ не співпадає ні з одним характеристичним числом, тобто $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$. Тоді за формулою (7.4) будемо мати

$$\varphi(x) = x^2 + x^4 + \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varphi_1(x)d_1 + \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda}\varphi_2(x)d_2 =$$
$$= x^2 + x^4 + \frac{\lambda x}{\frac{3}{2} - \lambda}\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x(x^2 + x^4)dx + \frac{\lambda x^2}{\frac{5}{2} - \lambda}\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2(x^2 + x^4)dx.$$

Оскільки $\int_{-1}^{1} x(x^2 + x^4)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} x^2(x^2 + x^4)dx = \frac{24}{35}$, то

$$\varphi(x) = x^2 + x^4 + \frac{2\lambda x^2}{5 - 2\lambda}\frac{24}{35}\cdot\frac{5}{2} = x^4 + x^2\frac{10\lambda + 35}{7(5 - 2\lambda)}.$$

Розглянемо випадок коли $\lambda = \frac{3}{2}$. Розв′язок рівняння (7.6) існує, тому що $(f, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x(x^2 + x^4)dx = 0$. На підставі (7.5), дістанемо нескінчену множину розв′язків $\varphi(x) = x^2 + x^4 + cx + \frac{\lambda x^2 - 24}{7(5 - 2\lambda)}$.

Нехай тепер $\lambda = \frac{5}{2}$. У цьому випадку інтегральне рівняння (7.6) розв′язків не має, оскільки не виконуються умови існування розв′язків (третя теорема Фредгольма): $(f, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^2(x^2 + x^4)dx \neq 0$.

Приклад 2. Знайти розв′язки інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(xt + x^2t^2)\varphi(t)dt + ax + b \qquad (7.10)$$

при всіх λ та параметрів a і b.

Розв'язання. Маємо $f(x)=ax+b$. Характеристичні числа ядра $K(x,t)=\frac{1}{2}(xt+x^2t^2)$: $\lambda_1=3,\quad \lambda_2=5$. Їм відповідають власні функції $\varphi_1(x)=x,\quad \varphi_2(x)=x^2$.

Нехай $\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2$. З першої теореми Фредгольма параметри *a, b* – довільні, а розв′язок (7.10) має вигляд

$$\varphi(x)=ax+b+\frac{\lambda}{3-\lambda}\varphi_1(x)f_1+\frac{\lambda}{5-\lambda}\varphi_2(x)f_2=$$

$$=ax+b+\frac{\lambda}{3-\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}}x\int_{-1}^{1}(ax+b)\sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx+\frac{\lambda}{5-\lambda}\sqrt{\frac{5}{\lambda}}x^2\int_{-1}^{1}(ax+b)\sqrt{\frac{5}{\lambda}}x^2\,dx=$$

$$=b+ax\frac{3}{3-\lambda}+5b\frac{\lambda}{5-\lambda}x^2.$$

Розглянемо випадок коли $\lambda=\lambda_1=3$. За третьою теоремою Фредгольма розв′язок інтегрального рівняння (7.10) існує, якщо $(f,\varphi_1)=0$. Маємо $\int_{-1}^{1}(ax+b)x\,dx=a\frac{2}{3}$. Отже, потрібно покласти $a=0$, *b* – довільна стала. Розв′язок (7.10) має вигляд $\varphi(x)=b+cx+bx^2\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=b+cx+\frac{5bx^2}{2}$, де *c* – також довільна стала.

Якщо $\lambda=\lambda_2=5$, то повинна виконуватися умова $(f,\varphi_2)=0$, $(f,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}(ax+b)x^2\,dx=b\frac{2}{5}$. Отже $b=0$, а розв′язок інтегрального рівняння (7.10) запишеться наступним чином

$$\varphi(x)=ax+cx^2-\frac{5ax}{2},$$

де *a, c* – довільні сталі.

Приклад 3. Розв′язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{2\pi}(\cos x\cos t+2\sin 2t\sin 2x)\varphi(t)dt+\cos x. \qquad (7.11)$$

Розв'язання. Інтегральне рівняння (7.11) із симетричним виродженим ядром $K(x,t)=\cos x\cos t+2\sin 2t\sin 2x$. Його характеристичні числа $\lambda_1=\frac{1}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{1}{2\pi}$. Їм відповідають власні функції $\varphi_1(x)=\cos x,\quad \varphi_2(x)=\sin 2x$.

Розглянемо випадок коли $\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2$. Маємо $f(x)=\cos x$, розв′язок (7.11) за формулою (7.4) має вигляд

$$\varphi(x)=\cos x+\frac{\lambda}{\frac{1}{\pi}-\lambda}\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\cos x\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}dx+\frac{\lambda}{\frac{1}{\pi}-\lambda}\sin 2x\int_0^{2\pi}\cos x\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}dx=\frac{\cos x}{1-\pi\lambda}.$$

Якщо $\lambda=\lambda_1=\frac{1}{\pi}$, то умова існування розв′язку $(f,\varphi_1)=0$ не виконується $\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx\neq 0\right)$. Отже рівняння (7.11) у цьому випадку не має.

Якщо $\lambda=\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, то умова розв′язуваності рівняння (7.11) виконується: $(f,\varphi_2)=\int_0^{2\pi}\cos x\sin 2x\,dx=0$. Тоді $\varphi(x)=2\cos x+c\sin 2x$, де c – довільна стала.

Приклад 4. Розв′язати рівняння

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=x, \tag{7.12}$$

де $K(x,t)=\begin{cases}x(t-1), & \text{якщо} \quad 0\le x\le t\\ t(x-1), & \text{якщо} \quad t\le x\le 1\end{cases}$.

Розв'язання. Характеристичні числа і відповідні їм власні функції мають вигляд $\lambda_n=-\pi^2n^2,\quad \varphi_n(x)=\sin\pi nx,\quad n=1,2,\ldots$.

Якщо $\lambda\neq\lambda_n$, то розв′язком рівняння (7.12) буде функція

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda+\pi^2n^2}\sin\pi nx. \tag{7.13}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур′є правої частини рівняння

$$f_n=\lambda\int_0^1 x\sin\pi nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Підставимо в (7.13), одержимо $\varphi(x)=x-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda+\pi^2n^2)}\sin\pi nx$.

Якщо $\lambda=-\pi^2n^2$, то рівняння (7.12) розв′язків не має, оскільки

$$f_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\neq 0.$$

Приклад 5. Розв′язати рівняння $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\cos\pi x$,

де $K(x,t)=\begin{cases}(x+1)t, & \text{якщо} \quad 0\le x\le t\\ (t+1)x, & \text{якщо} \quad t\le x\le 1\end{cases}$.

Розв'язання. Характеристичні числа $\lambda_0=1,\quad \lambda_n=-\pi^2n^2,\quad n=1,2,\ldots$. Відповідні їм власні функції

$$\varphi_0(x)=e^x,\quad \varphi_n(x)=\sin\pi nx+\pi n\cos\pi nx,\quad n=1,2,\ldots.$$

Якщо $\lambda \neq 1, \quad \lambda \neq -\pi^2 n^2$, то шуканий розв'язок буде мати вигляд

$$\varphi(x) = \cos\pi x - \lambda\left\{\frac{f_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda + \pi^2 n^2}(\sin\pi nx + \pi n\cos\pi nx)\right\}.$$

Оскільки $f_0 = \int_0^1 e^x \cos\pi x\,dx = -\dfrac{1+e}{1+\pi^2}$,

$$f_n = \int_0^1 \cos\pi x(\sin\pi nx + \pi n\cos\pi nx)dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1 \end{cases},$$

то $\varphi(x) = \cos\pi x + \lambda\left\{\dfrac{1+e}{1+\pi^2}\dfrac{e^x}{\lambda - 1} - \dfrac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x)\right\}$.

Якщо $\lambda = 1, \quad \lambda = -\pi^2 \quad (n = 1)$, то рівняння (7.12) розв'язків не має, так як його права частина, тобто функція $f(x) = \cos\pi x$, не ортогональна до власних функцій $\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_1(x) = \sin\pi x + \pi\cos\pi x$.

Якщо $\lambda = -\pi^2 n^2, \quad n = 2,3,\ldots$, то інтегральне рівняння (7.12) має нескінченну множину розв'язків

$$\varphi(x) = \cos\pi x +$$
$$+\lambda\left\{\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x) + c(\sin\pi nx + \pi n\cos\pi nx)\right\},$$

де c – довільна стала.

У деяких випадках неоднорідне симетричне інтегральне рівняння можна звести до неоднорідної крайової задачі. Це можливо лише тоді, коли ядро $K(x,t)$ інтегрального рівняння є функцією Гріна деякого лінійного диференційного оператора. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 6. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x, \tag{7.14}$$

де $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}(t-1)}{\mathrm{sh}1}, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le t \\ \dfrac{\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}, & \text{якщо} \quad t \le x \le 1 \end{cases}$.

Розв'язання. Дане рівняння запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{sh}t\,\varphi(t)dt - \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt + xe^x. \tag{7.15}$$

Продиференціюємо останнє рівняння двічі, дістанемо

$$\varphi'(x) = -\frac{\mathrm{ch}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{sh}t\,\varphi(t)dt - \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt + e^x(1+x),$$

$$\varphi''(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{sh}t\varphi(t)dt - \frac{\mathrm{ch}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\mathrm{sh}x\varphi(x) -$$

$$-\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt + \frac{\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\mathrm{ch}x\varphi(x) + (2tx)e^x =$$

$$= \varphi(x) + 2e^x + \frac{\varphi(x)}{\mathrm{sh}1}[\mathrm{sh}(x-1)\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\mathrm{ch}(x-1)] = 2e^x,$$

чи $\varphi''(x) = 2e^x$.

Покладемо в (7.15) $x = 0$ та $x = 1$, одержимо, що $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = e$. Шукана функція $\varphi(x)$ є розв′язком неоднорідної крайової задачі

$$\varphi''(x) = 2e^x, \tag{7.16}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = e. \tag{7.17}$$

Загальний розв′язок (7.16) має вигляд $\varphi(x) = c_1 x + c_2 + 2e^x$.

Для визначення сталих c_1, c_2 використаємо крайові умови (7.17). Дістанемо систему алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} \varphi(0) = 2 + c_2 = 0 \\ \varphi(1) = 2e + c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$

Звідки одержимо $c_1 = 2 - e, \quad c_2 = -2$. Отже розв′язок рівняння (7.14) має вигляд $\varphi(x) = (2-e)x + 2(e^x - 1)$.

Приклад 7. Розв′язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt + \mathrm{ch}x, \tag{7.18}$$

де $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}(t-1)}{\mathrm{sh}1}, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le t \\ \dfrac{\mathrm{ch}t\,\mathrm{ch}(x-1)}{\mathrm{sh}1}, & \text{якщо} \quad t \le x \le 1 \end{cases}$.

Розв'язання. Рівняння (7.18) запишемо наступним чином

$$\varphi(x) = \lambda\frac{\mathrm{ch}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{ch}t\varphi(t)dt + \lambda\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{ch}(t-1)\varphi(t)dt + \mathrm{ch}x. \tag{7.19}$$

Останнє рівняння двічі продиференціюємо. Отримаємо

$$\varphi'(x) = \lambda\frac{\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{ch}t\varphi(t)dt + \lambda\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{ch}(t-1)\varphi(t)dt + \mathrm{ch}x, \tag{7.20}$$

$$\varphi''(x)=\lambda\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}1}s\mathrm{h}(x-1)\varphi(x)+\lambda\frac{c\mathrm{h}(x-1)}{\mathrm{sh}1}\int_0^x \mathrm{ch}t\varphi(t)dt-$$

$$-\lambda\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}1}\mathrm{ch}(x-1)\varphi(x)+\lambda\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}1}\int_x^1 \mathrm{ch}(t-1)\varphi(t)dt+\mathrm{ch}x=$$

$$=\varphi(x)+\lambda\frac{\varphi(x)}{\mathrm{sh}1}[\mathrm{ch}x\mathrm{sh}(x-1)-\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(x-1)]=\varphi(x)(1-\lambda),$$

чи $\varphi''(x)-(1-\lambda)\varphi(x)=0$.Підставимо в рівняння (7.20) $x=0$ і $x=1$. Дістанемо $\varphi'(0)=0,\quad \varphi'(1)=\mathrm{sh}1$. Отже, для знаходження розв′язку інтегрального рівняння (9.19) одержали неоднорідну крайову задачу

$$\begin{cases}\varphi''(x)-(1-\lambda)\varphi(x)=0 & (7.21)\\ \varphi'(0)=0,\quad \varphi'(1)=\mathrm{sh}1. & (7.22)\end{cases}$$

Розглянемо наступні випадки:

1) $\lambda-1=0$, т.т. $\lambda=1$. Рівняння (7.21) має вигляд $\varphi''(x)=0$. Його загальний розв′язок $\varphi(x)=C_1x+C_2$, $\varphi'(x)=C_1$. Враховуючи крайові умови (7.22), одержимо систему рівнянь для визначення C_1, C_2

$$\begin{cases}\varphi'(0)=C_1=0,\\ \varphi'(1)=C_1=\mathrm{sh}1.\end{cases}$$

Дана система розв′язків не має.

2) Нехай $1-\lambda>0$, т.т. $\lambda<1$. Проінтегруємо (7.21). Маємо

$$\varphi(x)=C_1\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}x+C_2\mathrm{ch}\sqrt{1-\lambda}x.$$

Знайдемо $\varphi'(x)$: $\varphi'(x)=\sqrt{1-\lambda}\left(C_1\mathrm{ch}\sqrt{1-\lambda}x+C_2\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}x\right)$.

Використовуючи (7.22), одержимо систему для знаходження C_1, C_2:

$$\begin{cases}\varphi'(0)=\sqrt{1-\lambda}C_1=0,\\ \varphi'(1)=\sqrt{1-\lambda}\left(C_1\mathrm{ch}\sqrt{1-\lambda}x+C_2\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}x\right)=\mathrm{sh}1.\end{cases}$$

З першого рівняння дістанемо $C_1=0$, тоді $C_2=\dfrac{\mathrm{sh}1}{\sqrt{1-\lambda}\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}}$. Отже, в цьому випадку розв′язок (7.18) має вигляд $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{sh}1\mathrm{ch}\sqrt{1-\lambda}x}{\sqrt{1-\lambda}\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}}$.

3) Нехай тепер $1-\lambda<0$, т.т. $\lambda>1$. Загальним розв′язком рівняння (7.21) буде функція $\varphi(x)=C_1\sin\sqrt{1-\lambda}x+C_2\cos\sqrt{1-\lambda}x$. Щоб визначити C_1 і C_2, знайдемо похідну функції $\varphi(x)$ і використаємо умови (7.22). Маємо

$$\varphi'(x)=\sqrt{1-\lambda}\left(C_1\cos\sqrt{1-\lambda}x-C_2\sin\sqrt{1-\lambda}x\right),$$

$$\varphi'(0)=\sqrt{1-\lambda}C_1=0,$$

$$\varphi'(1)=\sqrt{1-\lambda}\left(C_1\cos\sqrt{1-\lambda}x-C_2\sin\sqrt{1-\lambda}x\right)=\mathrm{sh}1.$$

З першого рівняння дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{\mathrm{sh}1}{\sqrt{1-\lambda}\sin\sqrt{1-\lambda}}$. Отже, в цьому випадку розв′язок (7.18) має вигляд $\varphi(x) = -\dfrac{\mathrm{sh}1\cos\sqrt{1-\lambda}x}{\sqrt{1-\lambda}\sin\sqrt{1-\lambda}}$.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему Гільберта-Шмідта.
2. Коли симетричне ядро має зчисленну множину характеристичних чисел?
3. Наведіть алгоритми розв′язування неоднорідного інтегрального рівняння з симтеричним ядром.
4. Яким чином розв′язується неоднорідне інтегральне рівняння, ядро якого є функцією Гріна деякого лінійного диференціального оператора.

Приклади для самостійного розв′язання

I. Розв′язати наступні інтегральні рівняння

1) $\varphi(x) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}\right)\varphi(t)dt + 1 - 6x^2$.

2) $\varphi(x) = \lambda\int\limits_{0}^{1} 2e^{x+t}\varphi(t)dt + e^x$.

3) $\varphi(x) - \int\limits_{0}^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = x, \quad K(x,t) = \begin{cases}(x+1)(t-3), & 0 \le x \le t,\\ (t+1)(x-3), & t \le x \le 1.\end{cases}$

4) $\varphi(x) - 2\int\limits_{0}^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt = \cos 2x, \quad K(x,t) = \begin{cases}\sin x\cos t, & 0 \le x \le t,\\ \sin t\cos x, & t \le x \le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

5) $\varphi(x) - \dfrac{\pi^2}{4}\int\limits_{0}^{1} K(x,t)\varphi(t)dt = \dfrac{x}{2}, \quad K(x,t) = \begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \le x \le t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \le x \le 1.\end{cases}$

II. Знайти розв′язки наступних інтегральних рівнянь для всіх λ і всіх параметрів a, b, c

1) $\varphi(x) = \lambda\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt + a\sin x + b$.

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}\right)\varphi(t)dt + ax^2 + bx + c.$$

3. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.

Основна

1. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко / В.Д. Морозова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520с.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов – М.: Наука, 1984. – 432с.
3. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язання задач / О.Ю. Грищенко, М.Г. Нагнибіда, П.П. Настасієв – К.: 1994. – 376с.
4. Лаврентьев М.А Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, В.В. Шабат – М.: Наука, 1987. – 688с.
5. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович – М.: Наука, 1975. – 319с.
6. Краснов М.Т. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Т. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М.: Наука, 1981. – 304с.

Додаткова

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функцій / А.В. Бицадзе – М.: Наука, 1969. – 240с.
2. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної / О.Ю. Грищенко, С.І. Ляшко. – К.: Київський університет, – 2009. – 496с.
3. Доронин В.Г. Методические указания к лабораторным работам по курсу теории функцій комплексного переменного / В.Г. Доронин, В.А. Кофанов – Днепропетровск.: ДГУ, 1991. – 56с.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов – М.: Наука, 1991. – 448с.
5. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функцій / А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1978. – 415с.
7. Маркушевич А.И. Введение в теорію аналитических функцій / А.И. Маркушевич, Л.А Маркушевич – М.: Просвещение, 1977. – 320с.
8. Свешников А.Т. Теория функцій комплексного переменного / А.Т. Свешников, А.Н. Тихонов – М.: Наука, 1974. – 320с.

Сидоров Ю.В. Лекции по теории функцій комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин – М.: Наука, 1989. – 480с.